lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales

I. G. PETROVSKI

I. G. PETROVSKI

Lecciones sobre ecuaciones en

DERIVADAS PARCIALES

CIENCIA TECNICA

INSTITUTO DEL LIBRO

La Habana, 1969

Traducción del Dr. Carlos Vega.
Diseño de José González

ÍNDICE

SECCION I

SECCION II

DEL PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

He dictado estas conferencias varias veces para los estudiantes de matemática de la Facultad de Mecánica y Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú y las he ampliado algo al preparar la edición.

Durante el trabajo sobre este libro me han ofrecido una gran ayuda K. S. Kuzmin, A. D. Myshkis, Z. Y. Shapiro, B. M. Levitan y M. I. Vishik. K. S. Kuzmin me facilitó los apuntes de mis clases. Especialmente considerable ha sido la ayuda de Z. Y. Shapiro, quien redactó el manuscrito y escribió totalmente los §§ 22-25 así como algunas partes de otros epígrafes. Sin esta ayuda, el libro no se hubiera editado aún. A. D. Myshkis y M. I. Vishik han leído todo el manuscrito y han hecho varias observaciones importantes. Además, A. D. Myshkis escribió los §§ 34, 35 y parte del § 4. B. M. Levitan ha escrito el subepígrafe 3 del § 26. A todos estoy profundamente agradecido.

9 de abril de 1950.

I. PETROVSKI

DEL PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

Durante la preparación de esta edición ha realizado un gran trabajo O. A. Oleynik. En particular, ha escrito de nuevo los §§ 23, 28, 42, 43, algunas partes de otros epígrafes, y también ha añadido nuevos problemas. Estoy muy agradecido a Olga Arsenevna Oleynik por esta labor. Agradezco también al académico V. I. Smirnov y a A. D. Myshkis, O. A. Ladyzhenskaya y L. A. Chudov sus valiosas observaciones.

2 de agosto de 1953.

I. PETROVSKI

PRÓLOGO A LA TERCERA EDICIÓN

En la presente edición se han hecho varias modificaciones y adiciones; las más importantes se refieren a los §§ 9, 16, 24, 26, 29, 30, 37, 41 y 43, y también se han añadido nuevos problemas. El trabajo preparatorio de esta edición ha sido realizado por O. A. Oleynik y A. S. Kalashnikov, y el § 43 ha sido escrito de nuevo por L. A. Chudov. A todos estoy muy agradecido.

3 de mayo de 1960.

I. PETROVSKI

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

§ 1. DEFINICIONES. EJEMPLOS

1. Una ecuación en derivadas parciales de las funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_n$, se dice de orden n si contiene al menos una derivada de orden n y no contiene derivadas de orden superior. El orden de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales es el mayor entre los órdenes de las ecuaciones del sistema.

Una ecuación en derivadas parciales se llama *lineal* si es lineal respecto a todas las funciones incógnitas y sus derivadas. Una ecuación en derivadas parciales se llama *casilineal* si es lineal respecto a las derivadas de orden superior de las funciones incógnitas. Así, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$$

es una ecuación casilineal de segundo orden respecto a la función incógnita u. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\,(x, y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u$$

es una ecuación lineal de segundo orden respecto a la función incógnita u. Pero la ecuación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$$

no es lineal ni casilineal respecto a esta función.

Se llama *solución* de una ecuación en derivadas parciales, a todo sistema de funciones que al ser sustituido por las funciones incógnitas transforma la ecuación en una identidad respecto a las variables independientes. De forma análoga se define la solución de un sistema.

En este curso estudiaremos fundamentalmente ecuaciones lineales de segundo orden con una función incógnita. Como, por ejemplo, las siguientes ecuaciones

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, ecuación de la conducción térmica.

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, ecuación de ondas.

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$, ecuación de Laplace.

Muchos problemas de física se reducen a ecuaciones en derivadas parciales, y en particular a las señaladas más arriba.

2. *Ejemplo 1. Ecuación de la conducción del calor*

Sea G un cuerpo, cuya temperatura en el punto (x_1, x_2, x_3) en el instante t se determina por la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$. Supongamos que la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto a las variables x_1, x_2, x_3; y una derivada continua respecto a t.

La deducción de la ecuación que describe el proceso de propagación del calor se basa en la siguiente ley.

Supongamos que una superficie S pertenece al cuerpo G. Sobre la superficie S está definido el vector continuo de la normal n. La cantidad de calor q, que pasa por la superficie S en el sentido de la normal n en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2, se determina por la siguiente fórmula:

$$q = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k\,(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial n} dS \right\} dt. \qquad (1,1)$$

Aquí $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en el punto (x_1, x_2, x_3) de la superficie S según la dirección de la normal n; la integral interior se toma por la superficie S.

La función positiva $k(x_1, x_2, x_3)$ se llama coeficiente de conducción térmica interna del cuerpo en el punto (x_1, x_2, x_3).

La fórmula (1,1) es equivalente a que una cantidad de calor igual a

$$dq = -k\,(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt$$

atraviese una superficie infinitamente pequeña dS en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt.

En esta forma se expresa generalmente la ley física de la conducción del calor.

Si la superficie S está situada en la frontera entre el cuerpo y el medio exterior, se cumple la siguiente ley. Sea $u(t, x_1, x_2, x_3)$, como antes, la temperatura del cuerpo G en el punto $(x_1\ x_2,\ x_3)$, y sea $u_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ la temperatura en un punto arbitrario $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ fuera del cuerpo. Entonces la cantidad de calor que penetra en el cuerpo a través de la superficie S —situada en la frontera del cuerpo— en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es

$$q = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k_1(x_1,\ x_2,\ x_3)\,(u_1 - u)\,dS \right\} dt, \qquad (1',1)$$

donde la integral interna se toma sobre la superficie S y las funciones u_1 y u se determinan sobre S pasando al límite por fuera y por dentro del cuerpo respectivamente. En este caso $k_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ se llama coeficiente de conducción térmica externa en relación al medio dado.

Consideremos un cuerpo isotrópico respecto a la conducción térmica, es decir, supongamos que la función $k(x_1,\ x_2,\ x_3)$ no depende de la dirección de la normal a la superficie S en el punto $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Además supongamos que esta función tiene primeras derivadas continuas respecto a todas las coordenadas.

Para deducir la ecuación de la conducción térmica, analizaremos dentro del cuerpo G cierto volumen D limitado por la superficie suave S y consideraremos la variación de la cantidad de calor en este volumen en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2.

Según la fórmula (1,1), a través de la superficie S pasa una cantidad de calor igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x_1\ x_2,\ x_3)\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \right\} dt, \qquad (2,1)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior a la superficie S.

Por otro lado, esta misma cantidad de calor se puede determinar mediante la variación de la temperatura en el volumen D, durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2. La variación de la cantidad de calor es igual a

$$\iiint_D c(x_1, x_2, x_3)\, \rho\, (x_1, x_2, x_3)\, [u(t_2, x_1, x_2, x_3) - \\ - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad (3,1)$$

donde $\rho\ (x_1, x_2, x_3)$ es la densidad, $c(x_1, x_2, x_3)$ es la capacidad calorífica del cuerpo en el punto (x_1, x_2, x_3)[1] y la integral se toma por la región D. Igualando (2,1) y (3,1) obtendremos:

$$\iiint_D c\rho\, [u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3)]\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x_1, x_2, x_3)\, \frac{\partial u}{\partial n} dS \right\} dt. \qquad (4,1)$$

[1] El valor de una característica física de un cuerpo en un punto P determinado (por ejemplo, la densidad, la capacidad calorífica, etc.) se entiende siempre como cierto límite. A saber, se toma una sucesión de cubos de centro en el punto P y cuyo lado tiende a cero. Se considera la razón entre la cantidad correspondiente a cada cubo y el volumen del cubo y se toma el límite de esta razón cuando el lado del cubo tiende a cero. Por ejemplo, la densidad en un punto es el límite de la razón entre la masa del cubo y su volumen. Análogamente, la densidad superficial en un punto de una placa es el límite del cociente de la masa de un cuadrado de centro en ese punto y el área del cuadrado. La densidad lineal en un punto de una varilla es el límite de la razón entre la masa de un segmento con centro en ese punto y la longitud del segmento. Análogamente se determina la capacidad térmica, la conducción térmica en un punto, etc.

Según la fórmula de Ostrogradski

$$\iint\limits_{S} k\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

La integral del miembro izquierdo de la igualdad (4,1) puede ser escrita en la forma

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{D} c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right\} dt,$$

ya que $u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$

De este modo, para cualquier volumen D dentro del cuerpo G, se cumple la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{D} c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt - {}$$
$$- \int_{t_1}^{t}\iiint\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0$$

o bien

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{D}\left[c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt = 0.$$

Como las funciones bajo el signo de la integral son continuas y como el volumen D y el intervalo de tiempo (t_1, t_2) son arbitrarios, para cualquier punto (x_1, x_2, x_3) del cuerpo G y para cualquier instante t, la siguiente igualdad debe ser cierta

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{5,1}$$

Esta ecuación se llama ecuación de la *conducción del calor* de un cuerpo heterogéneo, en general, pero isotrópico. Si el cuerpo es homogéneo

$$k(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}, \quad c(x_1, x_2, x_3) = \text{const.},$$
$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \text{const.}$$

y la ecuación (5,1) se convierte en la ecuación

$$\frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{6,1}$$

Sustituyendo $\frac{k}{c\rho} t$ por t' y denotando t' de nuevo por t, reduciremos esta ecuación a la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{7,1}$$

Las ecuaciones (5,1) y (7,1) tienen muchas soluciones. Para separar de entre el conjunto de soluciones una determinada, es preciso establecer ciertas condiciones complementarias, que juegan el mismo papel que las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales ordinarias. De entre las condiciones complementarias, las más frecuentes son las llamadas *condiciones de frontera*, es decir, condiciones dadas en la frontera de la región G del espacio (x_1, x_2, x_3), en la cual buscamos la solución de la ecuación en derivadas parciales; y las *condiciones iniciales* referentes a cualquier instante determinado.

Desde el punto de vista físico está claro, en primer lugar, que la temperatura del cuerpo en un cierto instante y el régimen calorífico en la frontera del cuerpo, determinan la temperatura en los instantes posteriores y, en segundo lugar, que este régimen calorífico puede ser cualquiera. Si la región G coincide con todo el espacio, se puede demostrar que la solución acotada de la ecuación de la conducción térmica para $t > t_0$ se determina de un modo único con sólo establecer las condiciones iniciales: los valores de la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en el instante $t = t_0$. Para una región acotada G se puede, por ejemplo, dar el valor de la temperatura en cada punto del cuerpo en el instante $t = t_0$ y dar el valor de la temperatura en cada punto de la frontera del cuerpo para $t > t_0$. Resulta ser que estas condiciones son suficientes para determinar una solución acotada para $t > t_0$ y $(x_1, x_2 \; x_3) \in G$.

Para determinar la solución única de la ecuación de la conducción térmica, en lugar de definir $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en la frontera de G para $t > t_0$, se puede dar en esta frontera $\frac{\partial u}{\partial n}$, que es la derivada de la función incógnita u, en la dirección de la normal a la frontera de la región G. Llegaremos a un problema matemático de este tipo cada vez que estudiemos la temperatura dentro de un cuerpo G, siempre que conozcamos la cantidad de calor transmitido, en cualquier intervalo de tiempo (t_1, t_2), del espacio exterior a la superficie del cuerpo G, a través de cualquier área S en la frontera del cuerpo. Cantidad de calor que debe ser igual a la cantidad de calor transmitida del área S al interior del cuerpo; esta última, según la fórmula (1,1), es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \, dt,$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de conducción térmica en el punto fronterizo correspondiente.

Por lo tanto, si conocemos la ley de la transmisión del calor para cada área S de la frontera del cuerpo G, se puede hallar el valor de $\frac{\partial u}{\partial n}$ en la frontera de G. En particular, si no hay intercambio de calor a través de la frontera, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en la misma.

Finalmente, se puede dar como condición de frontera, para $t > t_0$, los valores de la combinación lineal:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u,$$

en la frontera de G, donde k_1 es el coeficiente de conducción térmica al pasar del espacio exterior al cuerpo G, y k es el coeficiente de conducción térmica interna del cuerpo. Estos coeficientes se suponen conocidos. Llegaremos a este problema matemático si estudiamos la temperatura dentro de un cuerpo G bajo la condición de que conocemos la temperatura u_1 del medio exterior al cuerpo G. Entonces, si realizamos el balance de la cantidad de calor que pasa por un trozo arbitrario de la frontera de G, de acuerdo con las fórmulas (1,1) y (1',1), obtendremos que:

1. La cantidad de calor que pasa, en un intervalo de tiempo (t_1, t_2), del espacio exterior a la superficie del cuerpo a través del área S, es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k_1(u_1 - u)\, dS\, dt.$$

2. La cantidad de calor transmitido en este mismo tiempo del trozo S de su superficie al interior del cuerpo es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\,\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, dt \qquad (k > 0).$$

Como (t_1, t_2) y S son arbitrarias

$$k_1 u + k\,\frac{\partial u}{\partial n} = k_1 u_1.$$

En particular, si $u_1 \equiv 0$, esta condición se convierte en

$$k\,\frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u = 0.$$

Supongamos que la temperatura en cada punto (x_1, x_2, x_3) dentro del cuerpo G se ha estabilizado, es decir, no varía con el tiempo. Entonces $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ y las ecuaciones (5,1) y (7,1) se convierten respectivamente en las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0. \tag{8,1}$$

Para determinar ahora $u(x_1, x_2, x_3)$, no es necesario dar las condiciones iniciales. Es suficiente dar las condiciones de frontera, que deben ser independientes del tiempo. Es fácil representarse esto físicamente del modo siguiente. Si las condiciones de frontera no dependen del tiempo, para cualquier temperatura inicial la temperatura $u(t, x_1, x_2, x_3)$ en cada punto (x_1, x_2, x_3) del cuerpo tiende a cierto límite $u(x_1, x_2, x_3)$ cuando $t \to \infty$. La función límite $u(x_1, x_2, x_3)$ satisface las ecuaciones estacionarias (8,1) y las condiciones de frontera anteriores que no dependen de t.

El problema de la determinación de la solución de cualquiera de las ecuaciones (8,1) a partir de sus valores en la frontera de la región considerada se llama *problema de Dirichlet*, o *primer problema de frontera.*

Además de la propagación del calor en el espacio, con frecuencia hay que estudiar la variación de temperatura a lo largo de una varilla o en una placa. Si en este caso el grueso de la varilla homogénea es tal que la temperatura en todos los puntos de una sección es la misma y si no se transmite calor al exterior a través de la superficie lateral de la varilla, la temperatura depende solamente del tiempo t y una coordenada espacial x. En este caso la función $u(t, x)$ satisface una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9,1}$$

si las unidades se escogen debidamente. La temperatura $u(t, x_1, x_2, x_3)$ dentro de un cuerpo tridimensional satisfaría la misma ecuación (9,1), si dependiera de una sola coordenada espacial, por ejemplo, de $x_1 = x$. Así sucede si la temperatura en todos los puntos de cada plano $x_1 =$ const. es la misma. Análogamente, al estudiar la propagación del calor en una placa homogénea plana y térmicamente aislada, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{10,1}$$

3. *Ejemplo 2. Ecuaciones: de equilibrio y de las vibraciones de una membrana*

Llamamos membrana a una película tensa que ofrece resistencia a la tracción y que no ofrece resistencia a la flexión, es decir, a un cambio de forma que no altera el área de ninguna parte de la membrana; el trabajo de una fuerza externa que produce la variación del área de una parte de la membrana es proporcional a esta variación. El coeficiente positivo de proporcionalidad T, no depende de la forma de este área ni de su situación y se llama *tensión* de la membrana.

Hagamos notar que el trabajo de las fuerzas internas de elasticidad es igual en valor absoluto al trabajo de las fuerzas externas que producen la alteración del área, pero de signo contrario.

Supongamos que en el *estado de reposo* la membrana está en el plano (x_1, x_2) y tiene la forma de cierta región plana G de frontera L.

Supongamos que sobre la membrana se aplica una fuerza cuya densidad en el punto (x_1, x_2) es igual a $f(x_1, x_2)$ (vea la llamada en la pág. 5) y cuya dirección es perpendicular al plano (x_1, x_2).

Bajo el efecto de esta fuerza, la membrana toma la forma de cierta superficie cuya ecuación escribiremos en la forma

$$u = u\,(x_1, x_2).$$

El eje u es perpendicular al plano (x_1, x_2).

Deduciremos la ecuación que satisface la función $u(x_1, x_2)$ en las condiciones siguientes. En primer lugar, supondremos que la superficie de la membrana no presenta gran curvatura en la posición de equilibrio, es decir, que está cerca de ser un trozo de plano. En otras palabras, supongamos que las derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ son pequeñas y despreciemos en nuestros razonamientos las potencias más altas de estas derivadas. Además, supongamos que bajo el efecto de la fuerza $f(x_1, x_2)$ los puntos de la membrana se mueven solamente por la perpendicular al plano (x_1, x_2) de manera que sus coordenadas (x_1, x_2) no varían.

La deducción de la ecuación está basada en uno de los principios fundamentales de la mecánica: en el principio de los desplazamientos virtuales según el cual, en estado de equilibrio la suma de los trabajos elementales de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema para cualquier desplazamiento virtual (que admite las condiciones impuestas) es igual a cero.[2]

Para calcular los trabajos elementales, hallemos el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la membrana cuando ésta se desplaza de la posición inicial plana a la posición definida

---

[2] Véase *G. K. Suslov,* Mecánica teórica, Gostiejizdat, 1946.

por la función $u(x_1, x_2)$. El trabajo de una fuerza cuya densidad es igual a $f(x_1, x_2)$ está dado por la integral:

$$\iint_G f(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

ya que sobre el elemento $dx_1\, dx_2$ actúa la fuerza $f(x_1, x_2)ax_1\, ax_2$. La variación del área de la membrana para este desplazamiento es igual a

$$\iint_G \left(\sqrt{1 + u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}} - 1\right) dx_1\, dx_2;$$

y el trabajo de las fuerzas internas para esta variación del área es igual a

$$-T \iint_G \left(\sqrt{1 + u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}} - 1\right) dx_1\, dx_2.$$

Desarrollemos la función subintegral en serie según las potencias de u'_{x_1} y u'_{x_2} y, basándonos en la suposición de que estas cantidades son pequeñas, omitiremos los términos de exponentes más alto de la descomposición. Entonces, obtendremos la expresión

$$-\frac{T}{2} \iint_G \left[u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2}\right] dx_1\, dx_2$$

para el trabajo de las fuerzas internas de elasticidad.

Por eso el trabajo de todas las fuerzas interiores que actúan sobre la membrana y de la fuerza f, para un desplazamiento de la membrana de la posición de reposo hasta cierta posición $u(x_1, x_2)$, es igual a

$$A(u) = \iint\limits_G \left[-\frac{T}{2} \left(u'^2_{x_1} + u'^2_{x_2} \right) + fu \right] dx_1\, dx_2. \qquad (11,1)^3$$

Realicemos ahora un desplazamiento virtual de la membrana, es decir, agreguemos a $u(x_1, x_2)$ una cierta función $\delta u(x_1, x_2)$. El trabajo de todas las fuerzas que actúan en este desplazamiento es igual a la variación de la integral (11,1) que no es difícil de calcular:

$$\delta A = A(u + \delta u) - A(u) \approx$$
$$\approx \iint\limits_G \left[-T \left(u'_{x_1}\, \delta u'_{x_1} + u'_{x_2}\, \delta u'_{x_2} \right) + f\delta u \right] dx_1\, dx_2, \qquad (12,1)$$

y que de acuerdo con el principio de los desplazamientos virtuales, debe ser igual a cero.

Integrando por partes los primeros dos sumandos, encontramos,

$$\iint\limits_G \left(u'_{x_1}\, \delta u'_{x_1} + u'_{x_2}\, \delta u'_{x_2} \right) dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int\limits_L \frac{\partial u}{\partial n}\, \delta u\, ds - \iint\limits_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \delta u\, dx_1\, dx_2,$$

[3] La integral (11,1) difiere sólo en el signo de la energía potencial de la membrana en la posición de equilibrio. Por lo tanto, podemos decir que nuestra deducción se basa en que, en la posición de equilibrio, la energía potencial de cualquier sistema mecánico es mínima.

de donde,

$$\delta A = \int_L - T \frac{\partial u}{\partial n} \delta u \, ds + \iint_G (T\Delta u + f) \, \delta u \, dx_1 \, dx_2, \tag{13,1}$$

donde Δu representa la suma de las segundas derivadas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior a la frontera L. Como señalamos más arriba, δu es un desplazamiento virtual, es decir, un desplazamiento que admite las condiciones impuestas a la membrana. Estas condiciones se dan generalmente en la frontera de la membrana, por eso la función $\delta u(x_1, x_2)$ es una función contínua arbitraria en los puntos interiores de la misma. Por consiguiente, haciendo δA igual a cero se puede deducir que para la posición de equilibrio la función $u(x_1, x_2)$, en cualquier punto interior, satisface la ecuación

$$T\Delta u + f = 0. \tag{14,1}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Poisson.*

En cuanto a las condiciones de ligadura, éstas se reflejan en las condiciones de frontera, que pueden ser muy variadas. Consideraremos por separado los casos más frecuentes.

1. Membrana fija

Supongamos que el borde de la membrana se ha fijado a lo largo de cierta curva alabeada que se proyecta en L. Si las ecuaciones paramétricas de L son $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, exigimos que la membrana pase por cierta curva $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$,

$u = \varphi(s)$. En este caso, la condición única impuesta a δu, es $\delta u = 0$ en L. Gracias a esta condición, en la fórmula (13,1) desaparece la integral curvilínea

El problema obtenido (hallar la solución de la ecuación de Poisson con la condición de frontera $u = \varphi(s)$ en L) se llama *problema de Dirichlet* para esta ecuación.

Para $f = 0$, la ecuación de Poisson se convierte en la ecuación de Laplace con la cual ya nos hemos encontrado en el ejemplo anterior.

2. *Membrana libre*

Si no imponemos ninguna condición a la posición de la membrana, su borde puede desplazarse arbitrariamente por la superficie lateral vertical de un cilindro de base L. En este caso, δu es arbitrario dentro y en la frontera de G y obtenemos para la ecuación (14,1) la siguiente condición en L:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

3. Con frecuencia se presenta el caso, cuando además de la fuerza f que actúa sobre los puntos interiores de la membrana, existe una fuerza vertical de densidad lineal f_1 y aplicada al borde de manera que la fuerza $f_1 ds$ actúe sobre el elemento ds de la frontera. Si buscamos la posición de equilibrio de la membrana en estas condiciones, a las integrales (11,1) y (12,1) es preciso agregar $\int\limits_L \left(\int\limits_0^u f_1 du \right) ds$ y $\int\limits_L f_1\, \delta u\, ds$ respectivamente.

La integral curvilínea en la fórmula (13,1) tiene, en este caso, la forma

$$\int_L \left(- T \frac{\partial u}{\partial n} + f_1\right) \delta u \, ds,$$

y para la ecuación de Poisson obtenemos la siguiente condición de frontera

$$T \frac{\partial u}{\partial n} - f_1 = 0$$

en L. Este problema se llama *segundo problema de frontera* (o, también, *problema de Neumann*) si f_1 no depende de u.

4. A veces se considera el llamado *ajuste elástico de la membrana*, es decir, el caso en que la fuerza que actúa sobre el borde de la membrana es proporcional al desplazamiento:

$$f_1(s) = ku(s).$$

En este caso, la condición de frontera para la ecuación de Poisson toma la forma $T \dfrac{\partial u}{\partial n} - ku = 0$.

Pasemos ahora a deducir la ecuación del movimiento de la membrana. Consideraremos solamente las vibraciones pequeñas y transversales de la misma. Lo primero significa que u, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ son pequeños; en la deducción de la fórmula (11,1) impusimos esta condición. Las vibraciones se llaman transversales si se realizan en la dirección de la perpendicular al plano (x_1, x_2).

De ese modo las coordenadas (x_1, x_2) de un punto fijo de la membrana no varían con el tiempo t, sólo varía la función

$$u = u(t, x_1, x_2).$$

La velocidad de un punto de coordenadas (x_1, x_2) es $\dfrac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial t}$ y la aceleración $\dfrac{\partial^2 u(t, x_1, x_2)}{\partial t^2}$. Para obtener la ecuación del movimiento de la membrana es necesario tomar en cuenta, según el principio de D'Alembert, la fuerza de inercia de la misma.

La densidad de esta fuerza es igual a $-\rho\,(x_1, x_2)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, donde $\rho(x_1, x_2)$ es la densidad superficial de la membrana en el punto (x_1, x_2). Obtendremos la ecuación de las vibraciones transversales de la membrana, si en la ecuación (14,1) sustituimos el segundo sumando por $-\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) - \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{15,1}$$

Las condiciones de frontera, en este caso, son las mismas que para la ecuación (14,1) con la diferencia de que las funciones definidas en la frontera pueden depender ahora del tiempo. Los más frecuentes son el problema de la membrana cuyo borde se ha ajustado a lo largo de una línea $L : u(t, x_1, x_2) = 0$ en L; y el problema de la membrana libre: $\dfrac{\partial u(t, x_1, x_2)}{\partial n} = 0$ en L.

Al igual que en el caso de la ecuación de la conducción térmica, desde un punto de vista físico es evidente que las condiciones de frontera no pueden por sí solas determinar unívocamente el movimiento de la membrana, ya que éste depende esencialmente de la posición y velocidad iniciales. En efecto, más tarde veremos que la solución de la ecuación (15,1) se determina unívocamente si se dan las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u\,(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_0(x_1, x_2), \\ u'_t(t_0, x_1, x_2) &= \varphi_1(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} (x_1, x_2) \in G \qquad (16,1)$$

y las condiciones de frontera de alguno de los casos considerados.

Teóricamente se puede considerar la llamada membrana libre no acotada, es decir, las vibraciones de todo el plano (x_1, x_2), que satisfacen la ecuación (15,1). Podemos llegar a este problema, si la membrana considerada es tan grande que se puede despreciar el efecto de la frontera.

En este caso, como se verá a continuación, es suficiente conocer los datos iniciales para determinar la solución única de la ecuación (15,1). En cambio, para una membrana acotada las condiciones (16,1) no determinan unívocamente la solución para todos los valores de t, sino para cada punto (x_1, x_2) y tan sólo en cierto intervalo $(-t_1, t_1)$, que depende del punto. Además, este intervalo es tanto menor cuanto más cerca esté el punto (x_1, x_2) de la frontera de la región G.

Si ρ es constante, por medio de una sustitución de las variables independientes, es posible transformar la ecuación (15,1) en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \qquad (17,1)$$

Analizando las vibraciones pequeñas de un gas (*ondas sonoras*), se puede demostrar que la función $u(t, x_1, x_2, x_3)$, que caracteriza el incremento de la presión en el punto (x_1, x_2, x_3) en el instante t, satisface la ecuación

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \tag{18,1}$$

donde $a > 0$ es una constante (*velocidad del sonido*).

La ecuación de la forma (18,1) se llama *ecuación de ondas* en el espacio; muchos otros procesos vibratorios (por ejemplo, los electromagnéticos) también se describen por la ecuación (18,1). La ecuación (17,1) se llama ecuación de ondas en el plano.

En el caso unidimensional (vibraciones de una cuerda o de un gas en un tubo) la función u correspondiente satisface la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{19,1}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de la cuerda vibrante*. Aquí $\rho(x)$ es la densidad lineal en el punto x y T es la tensión de la cuerda. Las condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones (18,1) y (19,1) son iguales a las condiciones correspondientes para la ecuación (15,1).

Hagamos notar una vez más que las ecuaciones (15,1), (18,1) y (19,1) se obtienen si se desprecian las derivadas $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^4$ en comparación con $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$. Si no las despreciamos, (es decir, si no se supone que las vibraciones son pequeñas), las ecuaciones del movimiento de los cuerpos elásticos correspondientes son ecuaciones no lineales, mucho más complejas.

Observación 1. Si consideramos t también como una coordenada espacial, la función $u(t, x_1, x_2)$ que describe las vibraciones de la membrana estará definida en un cilindro C con generatrices paralelas al eje Ot y que pasan por la frontera de G sobre la cual se encuentra la membrana. El problema considerado anteriormente consistía en determinar los valores de esta función dentro del cilindro partiendo de ciertas condiciones para la superficie lateral del cilindro C y para los valores de $u(t_0, x_1, x_2)$ y $u'_t(t_0, x_1, x_2)$ cuando el punto $(x_1, x_2) \in G$ se encuentra en la base del cilindro. En este planteamiento, las condiciones iniciales para $t = t_0$ no se pueden oponer a las condiciones de frontera. Tanto unas como otras son ahora condiciones de frontera dadas en la frontera del cilindro C.

Observación 2. Al considerar la ecuación de la conducción del calor o la ecuación de las vibraciones en un medio isotrópico, teníamos que en estas ecuaciones figuraban las expresiones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \text{ o bien } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{20,1}$$

Así ocurre siempre en las ecuaciones lineales de segundo orden planteadas para un medio isotrópico homogéneo de dos o tres dimensiones, porque las expresiones (20,1), llamadas operadores de Laplace aplicados a la función u, simplemente laplacianos, son las únicas combinaciones lineales (salvo un factor constante) de las segundas derivadas parciales de u que son invariantes para cualquier transformación ortogonal, es decir, para cualquier giro de los ejes de coordenadas en el espacio de 2 ó 3 dimensiones.

§ 2. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMA DE KOVALEVSKAYA

1. *Planteamiento del problema de Cauchy*

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de las funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_N$ respecto a las variables independientes $t, x_1 x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) \tag{1,2}$$

$$(k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j; \quad k_0 < n_j; \quad i, j = 1,2, \ldots, N).$$

Como se ve de las ecuaciones anteriores, para cada una de las funciones incógnitas u_i existe un orden superior n_i de las derivadas de esta función que figuran en el sistema considerado. La variable independiente t juega un papel especial entre las variables ya que, en primer lugar, entre las derivadas de orden superior n_i de cada función u_i que aparecen en el sistema dado, debe estar contenida la derivada $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$ y, además, el sistema está resuelto respecto a estas derivadas. Generalmente en los problemas físicos t representa el tiempo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$, las coordenadas espaciales. El número de ecuaciones es igual al número de funciones incógnitas.

Para un cierto valor de $t = t_0$ se dan los valores ("valores iniciales") de las funciones incógnitas u_i y de sus derivadas respecto a t hasta el orden $n_i - 1$. Supongamos que para $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1). \tag{2,2}$$

Todas las funciones $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ están definidas en una misma región G_0 del espacio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La derivada de orden cero de la función u_i es la propia función u_i.

El problema de Cauchy consiste en hallar la solución del sistema (1,2) que satisfaga para $t = t_0$ las condiciones iniciales (2,2).

La solución se busca en cierta región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, que toca la región G_0 en el hiperplano $t = t_0$ donde están dadas las condiciones (2,2).

Un caso especial del problema de Cauchy es el problema de determinar las vibraciones de una membrana homogénea y no acotada a partir de las condiciones iniciales, del cual se habló en el epígrafe anterior y que consiste en hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

si para $t = t_0$ están dados

$$u(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(0)}(x_1, x_2) \quad \text{(desplazamiento inicial)},$$
$$u_t'(t_0, x_1, x_2) = \varphi^{(1)}(x_1, x_2) \quad \text{(velocidad inicial)}.$$

Si $N = 1$, $n_1 = 1$, $n = 0$ el problema de Cauchy formulado anteriormente se convierte en el siguiente problema: Hallar la solución $u(t)$ de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{dt} = F(t, u),$$

tal que $u(t_0) = u_0$. Este problema se estudia ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. La función $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ de m variables complejas se llama *analítica en la vecindad del punto* $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$, si la misma es desarrollable en la serie de potencias

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_m) =$$
$$= \sum_{k_1 k_2 \ldots k_m} A_{k_1 k_2 \ldots k_m} (z_1 - z_1^0)^{k_1} (z_2 - z_2^0)^{k} \ldots (z_m - z_m^0)^{k_m},$$

que converge para $|z_i - z_i^0|$ suficientemente pequeños. Es fácil demostrar que en este caso $F(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ tiene en el punto $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0$ derivadas de todos los órdenes y que

$$A_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \frac{1}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} \left(\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots k_m} F}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2} \ldots \partial z_m^{k_m}} \right)_{z_1 = z_1^0, \ldots, z_m = z_m^0}.$$

Sean $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ los datos iniciales del problema de Cauchy para el sistema (1,2) [véase la fórmula (2,2)]. Introduzcamos, para abreviar, las siguientes notaciones para las derivadas de estas funciones en cierto punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\left(\frac{\partial^{k-k_0} \varphi_i^{(k_0)}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0} = \varphi^0_{i, k^0, k^1, k^2, \ldots, k^n}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N; \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_i).$$

Aquí se cumple el siguiente teorema fundamental.

Teorema de Kovalevskaya. Si todas las funciones F_i son analíticas en una vecindad del punto $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots$ $\ldots, \varphi^0_{j, k_0, k_1, \ldots, k_n}, \ldots)$ y todas las funciones $\varphi_j^{(k)}$ son analíticas en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, el problema de

Cauchy admite solución analítica en una vecindad del punto $(t^0; x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *solución que es única en la clase de las funciones analíticas*

3. Daremos la demostración del teorema de Kovalevskaya para sistemas lineales arbitrarios. Para estos últimos el problema de Cauchy se reduce fácilmente al problema de Cauchy para sistemas lineales de primer orden, mediante un procedimiento que, para simplificar, expondremos para el caso de una ecuación de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i (t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial t} +$$
$$+ c(t, x_1, \ldots, x_n) u + f(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{3,2}$$

donde $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c, f son funciones analíticas de sus argumentos en la vecindad del punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

El problema de Cauchy para esta ecuación consiste en hallar la solución que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u_t(t^0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

donde φ_0 y φ_1 son funciones analíticas en la vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Sin perder generalidad podemos considerar que

$$t^0 = x_1^0 = \ldots = x_n^0 = 0,$$

ya que el caso de $t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ arbitrarios se reduce a éste mediante un cambio de las variables independientes que no altere la forma de la ecuación.

Si la función $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ satisface la ecuación (3,2) y las condiciones iniciales (4,2), es evidente que las funciones

$$u,\ u_0 = \frac{\partial u}{\partial t},\quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\quad (k = 1,2, \ldots, n)$$

satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + b_0 u_0 + cu + f, \tag{5,2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5,2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \tag{5,2$''$}$$

y las condiciones iniciales

$$u\,(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2}$$

$$u_0(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{6,2$'$}$$

$$u_k(0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \varphi_0(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} \tag{6,2$''$}$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

Demostremos la afirmación recíproca: si las funciones $u, u_0, u_1, \ldots, u_n$ satisfacen las ecuaciones (5,2), (5,2)′, (5,2)″ o, para abreviar, si satisfacen (5,2) en cierta región G del espacio $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contigua a la región G_0 del espacio $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ y las condiciones iniciales (6,2), (6,2)′, (6,2)″ en la región G_0, entonces en toda la región G la función $u(t, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ satisface la ecuación (3,2) y las condiciones iniciales (4,2).

En efecto, de las relaciones (5,2)″ se deduce que en toda la región G

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ por u_0 en el miembro derecho de (5,2)′ obtendremos:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x_k} \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial t}\left[u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right] = 0. \qquad (7,2)$$

Por eso

$$u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

no depende de t en toda la región G.

Según la condición (6,2)″, para $t = 0$, en la región G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Por eso de (7,2) se deduce que para todos los t en la región G

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{8,2}$$

Sustituyendo $u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ en (5,2), obtenemos que la ecuación (3,2) se satisface en toda la región G.

Es decir, hemos demostrado que el sistema (5,2) es equivalente a la ecuación (3,2), si para $t = 0$

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

---

[4] Hablando estrictamente, de los razonamientos anteriores se desprende que

$$u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

no depende de t en todo segmento de la recta paralela al eje Ot íntegramente contenido en la región G. Por lo tanto, $u_k - \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ en la parte de G que se cubre totalmente por segmentos de rectas paralelas al eje Ot, íntegramente contenidos en G y que intersectan G_0. Pero las funciones consideradas son analíticas; por eso de aquí se desprende, según un teorema conocido de la teoría de funciones analíticas, que estas expresiones se anulan en toda la región G.

Es evidente que el problema de Cauchy para la ecuación (3,2) se puede reducir al problema de Cauchy para el sistema (5,2) del modo señalado sin suponer que los coeficientes de la ecuación y las funciones iniciales son analíticas, siempre que la región G sea convexa respecto a t, es decir, siempre que la recta paralela al eje t intersecte la frontera de G a lo sumo en dos puntos.

En cambio, para condiciones iniciales arbitrarias, el sistema (5,2) en cierto sentido es más rico en soluciones que la ecuación (3,2), ya que las condiciones iniciales arbitrarias de la solución $u, u_0, u_1, \ldots, u_n$ no tienen que estar vinculadas obligatoriamente por las relaciones $u_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Problema 1. Demuestre que el problema de Cauchy para cualquier sistema (1,2) puede ser reducido al problema de Cauchy para un sistema de primer orden de la forma (1,2).

Problema 2. Demuestre que el problema de Cauchy para un sistema no lineal de primer orden de la forma (1,2) puede ser reducido, mediante la derivación de las ecuaciones del sistema y mediante la introducción de nuevas funciones incógnitas y ecuaciones complementarias, al problema de Cauchy para un sistema casilineal de ecuaciones de primer orden, es decir, para un sistema lineal respecto a todas las derivadas.

4. Por lo tanto el problema de Cauchy para la ecuación de segundo orden (3,2) se redujo al problema de Cauchy para el sistema lineal (5,2) de primer orden. Del mismo modo se puede reducir cualquier sistema de la forma (1,2) a un sistema de ecuaciones de primer orden resuelto para las derivadas respecto a t de todas las funciones incógnitas. Por eso, el teorema de Kovalevskaya para un sistema lineal arbitrario que puede ser planteado en la forma (1,2) queda demostrado, si lo demostramos para un sistema lineal arbitrario de primer orden de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j + c_i \qquad (9,2)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

con coeficientes analíticos para las condiciones iniciales analíticas arbitrarias

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (10,2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

El caso de cualesquiera funciones analíticas φ_i se reduce fácilmente al caso en el cual todas las

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Para esto en lugar de las funciones incógnitas anteriores $u_i\ (t, x_1, \ldots, x_n)$ introduciremos nuevas funciones incógnitas

$$v_i\ (t, x_1, \ldots, x_n) = u_i(t, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n). \quad (11,2)$$

Las funciones v_i satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} v_j +$$

$$+ \left(c_i + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\varphi_j \right), \qquad (12,2)$$

análogo al sistema (9,2), y a las condiciones iniciales

$$v_i(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0. \qquad (13,2)$$

Habiendo demostrado la existencia de la solución del problema de Cauchy para el sistema (12,2) con condiciones iniciales nulas, demostraremos también que el problema inicial tiene solución.

Para abreviar las denotaciones, consideraremos que las funciones u_i $(t, x_1, \ldots, x_n)$ satisfacen las condiciones iniciales

$$u_i(0, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0. \tag{14,2}$$

5. Demostremos primeramente la unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (9,2) con las condiciones iniciales (14,2), en la clase de funciones analíticas, en una vecindad del punto O de coordenadas $t = 0$, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$; es decir, demostremos que en ninguna vecindad de este punto existen dos soluciones analíticas distintas del sistema (9,2) que satisfagan para $t = 0$ las mismas condiciones iniciales (14,2). Las funciones $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, analíticas en una vecindad del origen de coordenadas, se descomponen en series de potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$ en una vecindad del origen. El cofeiciente $a^i_{k_0 k_1 \ldots k_n}$ de $t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ del desarrollo de la función $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ es

$$\frac{1}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_0 + k_1 + \ldots + k_n} u_i}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{t = x_1 = \ldots = x_n = 0}$$

La unicidad de la solución del problema de Cauchy quedará demostrada si comprobamos que las condiciones iniciales (14,2) determinan de un modo único los coeficientes del desarrollo de las funciones u_i, que satisfacen el sistema (9,2), en series de potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$, o lo que es lo mismo, si demostramos que estas condiciones determinan de una manera única los valores de todas las derivadas de u_i en el punto O de coordenadas $t = x_1 = \ldots = x_n = 0$. Determinaremos estas derivadas sucesivamente. Las condiciones iniciales determinan de una manera única los valores, en el punto O, de todas las derivadas de la forma

$$\left(\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)_{t=x_1=\ldots=x_n=0} \tag{15,2}$$

Todas estas derivadas son iguales a cero, ya que las identidades (14,2) se pueden derivar respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supongamos que existe una solución del problema de Cauchy. Sustituyamos en las ecuaciones (9,2) u_j por las funciones que constituyen esta solución. Derivemos todas las identidades obtenidas k_1 veces respecto a x_1, k_2 veces respecto a x_2, $\ldots$, k_n veces respecto a x_n. Entonces en los miembros izquierdos se obtienen derivadas de la forma

$$\frac{\partial^{k+1} u_i}{\partial t\, \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \tag{16,2}$$

y en los derechos, las derivadas respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las funciones incógnitas y de los coeficientes de la ecuación, es decir, cantidades determinadas unívocamente en el punto O por las ecuaciones y las condiciones iniciales. Las identidades obtenidas determinan en el punto O los valores de las derivadas de la forma (16,2) (una derivación respecto a t).

Derivemos cada una de las identidades (9,2) una vez respecto a t, k_1 veces respecto a x_1, $\ldots$, k_n veces respecto a x_n. Entonces, en los miembros derechos se obtienen expresiones formadas por derivadas de u_i de la forma (16,2) y (15,2) y por las derivadas de los coeficientes $a_{ij}^{(k)}$, b_{ij} y c_i. En los miembros izquierdos, se obtienen derivadas de la forma

$$\frac{\partial^{k+2} u_i}{\partial t^2 \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \tag{17,2}$$

(dos derivaciones respecto a t). Como que ya hemos demostrado que las derivadas de la forma (16,2) y (15,2) quedan determinadas unívocamente en el punto O por las ecuaciones (9,2) y las condiciones iniciales (14,2), de aquí se deduce que todas las derivadas (17,2) quedan determinadas unívocamente en el punto O. Continuando este proceso, comprobaremos de ese modo, que todas las derivadas de u_i quedan determinadas en el punto O de una manera única por las ecuaciones (9,2) y las condiciones iniciales (14,2). Pero los valores de todas las derivadas de la función analítica $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ en el punto fijo O determinan unívocamente los valores de los coeficientes de la serie de potencias de t, $x_1, \ldots, x_n$ que es el desarrollo de esta función en una vecindad de O y, por eso, determinan los valores de esta misma función en la vecindad del punto O. Por lo tanto, las dos soluciones analíticas del sistema (9,2) con las mismas condiciones iniciales (14,2) y en cierta vecindad del origen de coordenadas coinciden necesariamente. Con esto queda demostrada la unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (9,2) en la clase de funciones analíticas.

6. En el subepigrafe 5 hemos demostrado que las condiciones iniciales determinan los coeficientes del desarrollo de las funciones u_i en series de potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$. Para la demostración de la existencia de la solución del problema de Cauchy es suficiente demostrar que las series de potencias con los coeficientes determinados en el subepígrafe 5 convergen en la vecindad del punto O. En efecto, si estas series convergen, las funciones analíticas $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ representadas por éstas, son iguales a cero en el punto O al igual que todas sus derivadas parciales respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [véase (15,2)]. Por consiguiente, son idénticamente nulas respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para $t = 0$ y, por eso, estas funciones satisfacen las condiciones iniciales (14,2). Además, satisfacen el sistema (9,2). En efecto, por la construc-

ción misma de estas funciones, en el punto O, los miembros izquierdos de las ecuaciones (9,2) y todas sus derivadas respecto a $t, x_1, \ldots, x_n$, si sustituimos en los mismos las u_i determinadas de ese modo, toman el mismo valor que los miembros derechos y sus derivadas correspondientes en el propio punto O; por consiguiente, los miembros izquierdos de las ecuaciones son idénticos a los derechos, en cierta vecindad del origen de coordenadas.

Para demostrar la convergencia de las series potenciales que hemos obtenido para las funciones u_i, utilizaremos el *método de las mayorantes.*

7. Se llama mayorante (o función mayorante) de una función analítica $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en cierta vecindad del punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$, a toda función analítica $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en esta vecindad para la cual todos los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias respecto a $t - t^0, x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ son positivos o iguales a cero y no menores que los valores absolutos de los coeficientes correspondientes del desarrollo de la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Traslademos el origen de coordenadas al punto $(t_1^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ y construyamos para la función analítica $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ en la vecindad del origen de coordenadas, una mayorante de forma especial que utilizaremos en lo que sigue.

Sea

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum c_{k_0 k_1 \ldots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}. \qquad (18{,}2)$$

La serie del miembro derecho converge absolutamente en cierto punto

$t = a_0, \; x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, donde todos los $|a_i| > 0$.

Entonces existe un número positivo M tal que para todos los $k_0, k_1, \ldots, k_n$ enteros y no negativos

$$\left| c_{k_0 k_1 \ldots k_n} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} \right| \leqslant M.$$

Por consiguiente, para todos los $k_0, k_1, \ldots, k_n$, se tiene

$$\left| c_{k_0 k_1 \ldots k_n} \right| \leqslant \frac{M}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}}.$$

Por eso, la función

$$S = \frac{M}{\left(1 - \frac{t}{|a_0|}\right)\left(1 - \frac{x_1}{|a_1|}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{|a_n|}\right)} =$$

$$= M \left[\sum_{k_0=0}^{\infty} \left(\frac{t}{|a_0|}\right)^{k_0} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{x_1}{|a_1|}\right)^{k_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n}{|a_n|}\right)^{k_n} \right] =$$

$$= \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n} \frac{M}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \tag{19,2}$$

es mayorante para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Se puede señalar otro modo de construcción de una serie mayorante. Así, por ejemplo, para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$, representada por la serie (18,2), también será mayorante la función

$$\frac{M}{1 - \frac{t + x_1 + \ldots + x_n}{a}},$$

donde $a = \min(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$, $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ y $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es un punto de convergencia de la serie (18,2).

En efecto, para $|t| + |x_1| + \ldots + |x_n| < a$, esta función se desarrolla en la serie

$$M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t + x_1 + \ldots + x_n}{a} \right)^k =$$

$$= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k} \frac{k!}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} t^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \tag{20,2}$$

pero

$$\frac{(k_0 + k_1 + \ldots + k_n)!}{k_0!\, k_1! \ldots k_n!} \geqslant 1; \quad \frac{1}{a^k} \geqslant \frac{1}{|a_0|^{k_0} |a_1|^{k_1} \ldots |a_n|^{k_n}},$$

es decir, los coeficientes de nuestra serie son positivos y no menores que los coeficientes correspondientes de la serie (19,2). Por lo tanto, la función (20,2) también es mayorante para la función (18,2).

Exactamente del mismo modo, para la función $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ la mayorante es

$$\frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n \right)^k}{a^k}, \tag{21,2}$$

donde a tiene el valor anterior, y $0 < \alpha < 1$.

Si desarrollamos de nuevo $\left(\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n \right)^k$ en potencias de $t, x_1, \ldots, x_n$, obtendremos una serie cuyos coeficientes son positivos y mayores que los coeficientes correspondientes del desarrollo en potencias de t, $x_1, \ldots, x_n$ de la función (20,2); ya que los coeficientes de la primera de estas series se obtienen de los coeficientes correspondientes de la segunda serie multiplicando por $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k_0}$, donde $0 < \alpha < 1$.

Observación 1. Supongamos que la serie potencial

$$\varphi(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} A_{k_1 k_2 \cdots k_m} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_m^{k_m},$$

converge para $|z_1| \leqslant d_1 + \varepsilon, \ldots, |z_m| \leqslant d_m + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un número. Supongamos que M^* es el valor mayor del módulo de la función $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$, cuando $z_1, \ldots, z_m$ toman valores reales y complejos que satisfacen las condiciones

$$|z_1| \leqslant d_1, \ldots, |z_m| \leqslant d_m.$$

Se puede demostrar (véase V. I. Smirnov, Curso de matemática superior, tomo 3, parte 2, n.83, Fizmatguiz, 1958), que la función

$$\frac{M^*}{\left(1 - \frac{z_1}{d_1}\right)\left(1 - \frac{z_2}{d_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z_m}{d_m}\right)}$$

es mayorante para la función $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$. De aquí se deduce que la función

$$\frac{M^*}{1 - \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_m}{d}},$$

donde $d = \min(d_1, \ldots, d_m)$, también es mayorante para $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$.

8. Pasemos ahora a la demostración de la existencia de la solución de Cauchy para el sistema (9,2) con las condiciones iniciales (14,2); llamémosla "problema 1" y al sistema (9,2) "sistema 1".

Supongamos que de algún modo hemos mayorado los coeficientes del sistema y los datos iniciales de Cauchy. Obtendremos un nuevo sistema y un nuevo problema de Cauchy (llamémoslos, respectivamente, "sistema 2" y "problema 2"). Demostremos que la solución analítica del "problema 2" es mayorante para la solución analítica del "problema 1". Si la solución del "problema 1" se representa en la vecindad del origen por la serie de potencias

$$u_i = \sum a^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \tag{22,2}$$

y la solución del "problema 2" por la serie

$$U_i = \sum A^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} t^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \tag{23,2}$$

debemos demostrar la siguiente desigualdad entre los coeficientes

$$\left| a^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n} \right| \leqslant A^{(i)}_{k_0 k_1 \dots k_n}. \tag{24,2}$$

Para el caso $k_0 = 0$, estas desigualdades se desprenden directamente de que los datos iniciales del "problema 2" mayoran los datos iniciales del "problema 1". Para el caso $k_0 > 0$, los coeficientes $a^{(i)}_{k_0, k_1 \dots k_n}$, y respectivamente $A^{(i)}_{k_0, k_1 \dots k_n}$ se obtienen mediante la suma y el producto de los coeficientes $a^{(i)}$, respectivamente $A^{(i)}$, de menor subíndice k_0; y de los valores en el punto O de los coeficientes del sistema 1, respectivamente del sistema 2, y de las derivadas de estos coeficientes. Por eso, es fácil comprobar que si para $k_0 < k$ son ciertas las desigualdades (24,2), también lo serán para $k_0 = k$. Es decir, son ciertas para todos los coeficientes de los desarrollos (22,2) y (23,2).

Por consiguiente, si el "problema 2" tiene solución [converge la serie (23,2)], el "problema 1" también tiene solución [converge la serie (22,2)]. Pero el "problema 2" puede construirse muy arbitrariamente, ya que podemos escoger de distintas maneras los mayorantes de los coeficientes y los datos iniciales del "problema 1". Construyamos el "problema 2" de modo tan simple, que su solución se pueda encontrar directamente. Para esto escojamos los números $M > 0$, $a > 0$ de manera que la función

$$\frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}$$

para $0 < \alpha < 1$, sea mayorante para todos los coeficientes del sistema excepto los términos independientes. Para estos últimos tomaremos una mayorante común de la forma

$$\frac{M_1}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}}$$ [5]

Esto se puede hacer, ya que una mayorante de esa forma existe para cada coeficiente y para construir la mayorante común debemos atribuir a los números M y M_1 el valor mayor, y para el número a el menor, de todos los valores correspondientes a los

[5] La posibilidad de escoger M_1 independientemente de M será útil en lo sucesivo (compárase con la observación 2 al final del epígrafe presente).

distintos coeficientes. Habiendo escogido de ese modo los números M, M_1 y a, escribamos el sistema mayorante en la forma

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{M}{1 - \dfrac{\dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n}{a}} \left[\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} U_j + m \right], \tag{25,2}$$

donde el número α, $0 < \alpha < 1$, lo escogeremos más tarde, y $m = \dfrac{M_1}{M}$.

Sin fijar aún los datos iniciales buscamos una solución del sistema en la forma

$$U_1(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv U_2(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv \ldots$$
$$\ldots \equiv U_N(t, x_1, \ldots, x_n) = U(t, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + \ldots + x_n\right) = U(z),$$

donde $z = \dfrac{t}{\alpha} + x_1 + \cdots + x_n$. Sustituyendo la supuesta solución en el sistema (25,2), obtendremos que la función $U(z)$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dU}{dz} = A(z) \left(Nn \frac{dU}{dz} + NU + m \right), \tag{26,2}$$

donde $A(z) = \dfrac{M}{1 - \dfrac{z}{a}}$. Separando en esta ecuación las variables tendremos

$$\frac{dU}{\dfrac{N}{m} U + 1} = \frac{mA(z)dz}{\dfrac{1}{\alpha} - NnA(z)} = B(z)\, dz.$$

Escojamos ahora el número positivo α tan pequeño que en una vecindad del punto $z = 0$ se cumple que

$$\frac{1}{\alpha} - NnA(z) > 0. \tag{27,2}$$

Entonces $B(z)$ es en esta vecindad una función analítica.

Demostremos que la solución parcial de la ecuación (26,2)

$$U(z) = \frac{e^{\frac{N}{m}\int_0^z B(t)\,dt} - 1}{N}\, m$$

nos da la mayorante deseada para la solución del "problema 1".

Como las funciones $U_i(t, x_1, \ldots, x_n) = U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + + \ldots + x_n\right)$ satisfacen el sistema (25,2), que mayora el sistema inicial, entonces para demostrar la afirmación anterior es suficiente comprobar que $U(z)$ para $t = 0$ es desarrollable en serie respecto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con coeficientes positivos, es decir, es mayorante del cero idéntico (de los datos iniciales del "problema 1").

En efecto, $A(z) = \dfrac{M}{1 - \dfrac{z}{\alpha}}$ es una función que tiene coeficientes no negativos en su desarrollo según z. Por lo tanto

$$B(z) = \frac{m\alpha A(z)}{1 - \alpha A(z) Nn} =$$

$$= m\alpha A(z)\,[1 + \alpha NnA(z) + \alpha^2 N^2 n^2 A^2(z) + \ldots]$$

también tiene coeficientes no negativos en su desarrollo según las potencias de z. Por eso,

$$C(z) = \frac{N}{m}\int_0^z B(z)dz,\ e^{C(z)} - 1 = C(z) + \frac{C^2(z)}{2!} + \dots,\ U(z)$$

también tienen esta propiedad. Entonces, también los coeficientes del desarrollo de $U(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ en potencias de $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son no negativos, es decir, $U(0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es en realidad una mayorante de cero. Por consiguiente, las funciones $U_i(t, x_1, \cdots, x_n) = U\left(\frac{t}{\alpha} + x_1 + \cdots + x_n\right)$ son solución del "problema 2". La analiticidad de esta solución se desprende de que $U(z)$, como se ha mostrado más arriba, es desarrollable en serie de potencias de z y por lo tanto en serie de potencias de $t, x_1, \cdots, x_n$. De aquí, según hemos señalado más arriba, se deduce la convergencia de las series potenciales (22,2) que representan la solución del problema inicial.

Con esto termina la demostración del teorema de Kovalevskaya para sistemas lineales.

Observación 2. De la demostración del teorema se ve que las series que dan la solución al problema de Cauchy para el sistema (9,2) convergen, en todo caso, en la región donde convergen las series que dan la solución del problema mayorante. De aquí se deduce que la solución del problema inicial de Cauchy para el sistema (9,2) y para las funciones iniciales φ_i, no necesariamente iguales a cero, existe, en todo caso, en la región

$$\left|\frac{t}{\alpha}\right| < \rho,\ |x_1| < \rho,\ \dots,\ |x_n| < \rho,\ \rho > 0,$$

si los coeficientes del sistema (9,2) y las funciones iniciales eran holomorfas en la región

$$|t| \leqslant R, \ |x_i| \leqslant R \quad (i = 1, 2, \ldots, n, R > 0).$$

Aquí ρ y α dependen sólo de R y del número M, pero no dependen de ninguna forma de los valores de las funciones iniciales $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ni de los términos independientes de las ecuaciones, ya que ni α ni la región de variación de z, donde se verifica (27,2), dependen de estos valores.

Observación 3. Para los sistemas que no son de la forma (1,2) el teorema de Kovalevskaya, en general, no es válido como lo ilustra el siguiente ejemplo que pertenece a la propia Kovalevskaya. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{28,2}$$

con la condición inicial

$$u(0, x) = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1. \tag{29,2}$$

Es fácil ver que la solución analítica $u(t, x)$ del problema (28,2), (29,2), si existe, debe representarse en una vecindad del origen de coordenadas por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1 - x)^{2n+1}};$$

sin embargo, esta serie diverge en todo punto para $t \neq 0$.

Problema. Demuéstrese el teorema de Kovalevskaya para un sistema casilineal de ecuaciones de primer orden.

§ 3. GENERALIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY. CONCEPTO DE CARACTERÍSTICA

1 *Generalización del problema de Cauchy.* Sea un sistema de N ecuaciones con N funciones incógnitas $u_1, u_2, \ldots, u_N$

$$\Phi_i\left(x_0, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N). \qquad (1,3)$$

Para cada función u_i existe el orden mayor n_i de las derivadas parciales de esta función respecto a las variables independientes $x_0, x_1, \cdots, x_n$, que figuran en el sistema (1,3). En la región señalada de los puntos $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ se define una superficie S, n-dimensional, suficientemente suave, y en cada punto de la superficie una línea l no tangente a S y que varía de forma suficientemente suave al moverse a lo largo de S, por ejemplo, la normal a la superficie. Sobre esta superficie se definen todas las funciones u_i y sus derivadas en la dirección de la línea l hasta el orden $n_i - 1$. Estas condiciones impuestas a la superficie S son una generalización de las condiciones de Cauchy (de las condiciones iniciales), consideradas en el epígrafe anterior. Tenemos que hallar la solución $u_1, u_2, \cdots, u_N$ del sistema (1,3) en cierta vecindad de la superficie S que satisface las condiciones impuestas a S.

2. Trataremos de reducir este problema al problema de Cauchy, enunciado en el epígrafe anterior. Para simplificar, nos limitaremos primero a considerar, en lugar del sistema (1,3), el siguiente sistema lineal:

$$\sum_{j, k_0, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \ldots$$
$$\ldots + f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (2,3)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

Hemos escrito aquí sólo los miembros que contienen las derivadas más altas de las funciones incógnitas.

En la vecindad de la superficie S introduciremos nuevas coordenadas curvilíneas $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ de manera que la ecuación de la superficie S tome la forma $\xi_0 = 0$ y que las líneas l coincidan con las líneas coordenadas

$$\xi_1 = c_1,\ \xi_2 = c_2,\ \ldots,\ \xi_n = c_n.$$

Para esto precisemos la suposición sobre el carácter suave de la superficie S y de las líneas l. Supongamos que para la superficie se pueden introducir los parámetros $\xi_1, \cdots, \xi_n$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x_0\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ x_1 = x_1\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n\ (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \end{array}\right\} \tag{3,3}$$

de manera que el rango de la matriz funcional

$$\left\|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right\| \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

sea igual a n en cada punto de S, y que los miembros derechos en (3,3) sean funciones suficientemente suaves.

Supongamos que las líneas l se definen por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = X_0\ (\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = X_n\ (\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n), \end{array}\right\} \tag{4,3}$$

donde ξ_0 es el parámetro de un punto a lo largo de la línea l y $\xi_1, \cdots, \xi_n$ son los parámetros del punto de intersección de l con S.

Además, se supone que los miembros derechos de las ecuaciones (4,3) son funciones suficientemente suaves de todos sus argumentos.

Respecto al parámetro ξ_0 supondremos que al menos una de las derivadas $\dfrac{\partial X_i}{\partial \xi_0}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ es distinta de cero, y que el punto de intersección de la línea l con la superficie S corresponde al valor $\xi_0 = 0$ (es decir, las ecuaciones (4,3) para $\xi_0 = 0$ son iguales a las ecuaciones (3,3) de la superficie S).

Demostremos ahora que el determinante funcional

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \dfrac{\partial X_0}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial X_0}{\partial \xi_n} & \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \tag{5,3}$$

es distinto de cero en cierta vecindad de la superficie S. En la superficie S, es decir, para $\xi_0 = 0$,

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_0}{\partial \xi_0} & \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_0} & \cdots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_0} \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial \xi_n} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \tag{6,3}$$

Las últimas n filas del determinante (6,3) son linealmente independientes, ya que por suposición el rango de la matriz funcional $\left\|\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\right\|$ $(i = 0, 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, n)$ es igual a n. Si el determinante (6,3) fuera igual a cero, su primera fila, que representa un vector no nulo tangente a l, sería una combinación lineal de las últimas n filas. Pero esto es imposible, ya que las últimas n filas representan vectores situados sobre el hiperplano tangente a S y las líneas l por suposición no son tangentes a S.

Por continuidad, el determinante (5,3) es distinto de cero en cierta vecindad de S. Por eso, en esta vecindad, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ se pueden tomar como nuevas coordenadas del punto $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

Pasemos a las variables independientes $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ en las ecuaciones (2,3). En las ecuaciones transformadas nos van a interesar principalmente los términos que contienen las derivadas de u_i respecto a ξ_0 de orden superior a n_i. Escribiendo sólo estos miembros obtendremos

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} + \cdots$$

Por eso, escribiendo sólo los miembros con las derivadas de mayor orden de las funciones u_i respecto a ξ_0 en las ecuaciones obtenidas de la transformación de las ecuaciones (2,3), tendremos

$$\sum_{\substack{j=1 \\ k_0 + \dots + k_n = n_j}}^{N} A_{ij}^{(k_0 \dots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial \xi_0^{n_j}} + \dots = 0 \tag{7,3}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N).$$

Para que estas ecuaciones se puedan resolver unívocamente respecto a $\dfrac{\partial^n u_j}{\partial \xi_0^{n_j}}$ en cierta vecindad de S, siendo arbitrarios los demás términos de la ecuación (que no están escritos explícitamente), es necesario y suficiente que en todos los puntos de la superficie S el determinante

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0}\right)^{k_0} \ldots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n}\right)^{k_n} \right|$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

sea distinto de cero. Entonces, en virtud de la continuidad de los coeficientes $A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)}$ y de las derivadas $\dfrac{\partial \xi_0}{\partial x_k}$, este determinante también es distinto de cero en cierta vecindad de la superficie S en el espacio $(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$.

La ecuación

$$\left| \sum_{k_0+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)}(x_0,\ \ldots,\ x_n)\alpha_0^{k_0}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n} \right| = 0 \qquad (8,3)$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

se llama *ecuación característica* del sistema (2,3); aquí $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son ciertos parámetros para los cuales $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$. La dirección del hiperplano

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x_k - \overset{0}{x}_k) = 0$$

se llama *dirección característica* en el punto $(x_0^0, \cdots, x_n^0)$ del sistema (2,3), si

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)} (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \alpha_0^{k_0} \ldots \alpha_n^{k_n} \right| = 0\,[6].$$

La superficie $\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 0$ se llama *superficie característica* del sistema (2,3) o símplemente *característica,* si en cada punto de esta superficie

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \cdots k_n)} (x_0, x_1, \ldots, x_n) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right)^{k_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0$$

y si al menos una de las derivadas $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ $(k = 0; 1, \cdots, n)$ es distinta de cero.

De estas definiciones se deduce que la dirección de cada hiperplano tangente a la superficie característica o, como vamos a decir para abreviar, la dirección de la superficie característica es característica en todo punto.

---

[6] Debido a que la ecuación (8,3) es homogénea respecto a las incógnitas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, estas variables se pueden normar suponiendo, por ejemplo, que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Entonces α_k será el coseno del ángulo entre la norma al hiperplano característico y el eje Ox_k.

3. De lo anterior se ve que si la dirección de la superficie S de la cual se trató en el enunciado del problema generalizado de Cauchy, no es dirección característica del sistema (2,3) en ningún punto, entonces, después de sustituir por $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ las coordenadas $x_0, x_1, \cdots, x_n$, según se describió en el subepígrafe 2, el sistema transformado (7,3) se puede resolver siempre en la vecindad de la superficie S, respecto a las derivadas de orden superior de u_i respecto a ξ_0. Se obtiene el sistema

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}} = \sum_{j,k} B_{ij}^{(k_0 \cdots k_n)}(\xi_0, \ldots, \xi_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \cdots \partial \xi_n^{k_n}} + F_i(\xi_0, \ldots, \xi_n) \tag{9,3}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, N;\ k = k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j;\ k_0 < n_j).$$

Las condiciones definidas para la superficie S se convierten en las condiciones

$$\left(\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^k}\right)_{\xi_0 = 0} = \varphi_i^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n); \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \\ i = 1, 2, \ldots, N. \end{array} \tag{10,3}$$

Por lo tanto, si la superficie S no tiene dirección característica en ningún punto, el problema generalizado de Cauchy se reduce al problema anterior de Cauchy. El paso del primero de estos problemas al segundo es totalmente reversible: a cada solución suficientemente suave[7] de uno corresponde una única solución suave del otro.

---

[7] Es suficiente exigir que las funciones u_i tengan derivadas continuas hasta el orden n_i inclusive, y que las funciones que determinan el cambio de coordenadas tengan derivadas continuas hasta el orden máx (n_i), inclusive.

Pero en el epígrafe anterior se trató de la solución de un sistema con coeficientes analíticos y con condiciones iniciales analíticas. Para que el sistema (9,3) y el problema de Cauchy para él satisfagan estas exigencias es suficiente que se cumplan las siguientes condiciones complementarias:

(a) *Los coeficientes del sistema (2,3) son funciones analíticas* de $x_0, \cdots, x_n$.

(b) Las funciones $x_i = X_i\ (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ son funciones analíticas de sus argumentos.

La *posibilidad de escoger las funciones analíticas* X *depende* del carácter de la superficie S y de la familia de líneas l. Llamaremos a la superficie S y a la familia de líneas l, para las cuales esto es posible, superficie analítica y familia analítica de líneas, respectivamente.

Si la superficie está dada por la ecuación $F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$, es analítica siempre que $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sea una función analítica de sus argumentos y la superficie no tenga puntos singulares (puntos donde todas las primeras derivadas de la función F se convierten en cero). La familia de las normales a la superficie analítica es una familia analítica de líneas.

(c) Las condiciones iniciales son funciones analíticas de $\xi_1, \cdots, \xi_n$.

De acuerdo con el teorema de Kovalevskaya, podemos decir que al cumplirse las condiciones (a), (b) y (c) el problema generalizado de Cauchy tiene siempre solución única, en una cierta vecindad de la superficie S, si la superficie no tiene dirección característica en ningún punto.

Si la superficie S tiene en el punto A una dirección característica, es decir, si en el punto A de la superficie

$$\xi_0(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

se cumple la igualdad

$$\left| \sum_{k_0 + \ldots + k_n = n_j} A_{ij}^{(k_0 \ldots k_n)} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \right)^{k_0} \ldots \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0, \tag{11,3}$$

entonces en la superficie S, en general, no se pueden dar valores arbitrarios a las funciones u_i ni a sus derivadas, si se quiere que el problema generalizado de Cauchy tenga solución. En efecto, dejemos todos los términos que contengan derivadas de orden n_i respecto a ξ_0 de las funciones u_i en los miembros izquierdos de las ecuaciones (7,3) y pasemos el resto de los términos a la derecha. Entonces, en virtud de la condición (11,3), en el punto A, existe dependencia lineal entre los miembros izquierdos de las ecuaciones obtenidas. Esa misma dependencia lineal debe existir también entre los miembros derechos de estas ecuaciones, los cuales se determinan totalmente por los valores dados a las funciones u_i y a sus derivadas, en la superficie S. Esto impone una relación determinada a las condiciones iniciales, siempre que la dependencia lineal exigida entre los miembros derechos de las ecuaciones no se cumpla idénticamente para todos los valores en S de las funciones u_i y de sus derivadas. En este último caso, y también en el caso en que las condiciones de Cauchy para la superficie característica S estén dadas de tal manera que el sistema tenga solución respecto a las derivadas de orden superior respecto a ξ_0, consideradas como funciones de las variables independientes

$$\xi_0, \ldots, \xi_n, u_1, \ldots, u_N, \frac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$$

$$\left(k = \sum k_s \leqslant n_j,\ k_0 < n_j,\ j = 1, \ldots, N\right),$$

esa solución puede no ser única en la *vecindad del punto A*.

Determinemos, para algunos ejemplos concretos, las direcciones características de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones. Supondremos siempre que

$$\sum \alpha_i^2 = 1, \tag{12,3}$$

es decir, α_i denota el coseno del ángulo entre el eje Ox_i y la *normal al hiperplano de dirección característica*.

Ejemplo 1. Para la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

Teniendo en cuenta (12,3), probemos que la ecuación de Laplace no tiene direcciones características reales.

Ejemplo 2. Para la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 0.$$

De acuerdo con (12,3), debe cumplirse que

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

y por eso $2\alpha_0^2 = 1$; $\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, los planos tangentes a todas las superficies características forman con el eje Ox_0 un ángulo de 45°. Valiéndonos de esta propiedad de las superficies características es fácil imaginar qué forma tienen las superficies características que pasan por ciertas curvas en el plano $x_0 =$ const. Por ejemplo, la superficie característica que pasa por una recta cualquiera l de este plano, es un plano que pasa por l y que forma con el plano $x_0 =$ const. un ángulo de 45°. La superficie característica que pasa por una circunferencia K contenida en el plano $x_0 =$ const., es la superficie lateral del cono circular cuyo eje es paralelo al eje Ox_0 y cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con el plano $x_0 =$ const. o, lo que es lo mismo, con el eje Ox_0.

Es fácil ver, que para la llamada ecuación de ondas, en el espacio n dimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

son válidos resultados análogos.

Ejemplo 3. Para la ecuación de la conducción térmica

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

la relación (8,3) toma la forma

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 0.$$

De acuerdo con (12,3) de aquí se deduce que $\alpha_0^2 = 1$. Por eso los hiperplanos $x_0 =$ const. son las superficies características.

Ejemplo 4. Para la ecuación

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

la relación (8,3) toma la forma

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\alpha_1 + a_2(x_1, \ldots, x_n)\alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\alpha_n = 0.$$

Por eso, todos los hiperplanos que pasen por el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ y por el vector que sale de este punto y cuyos componentes son $(a_1, \ldots, a_n)$, tienen en este punto una dirección característica.

Ejemplo 5. Para los sistemas de ecuaciones con dos variables independientes

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2)\frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \sum_{j=1}^{n} b_{ji}(x_1, x_2)\frac{\partial u_j}{\partial x_2} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_1, x_2)u_j = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

la relación (8,3) toma la forma

$$| \alpha_1 a_{ij}(x_1, x_2) + \alpha_2 b_{ij}(x_1, x_2) | = 0.$$

Las líneas características serán las líneas a lo largo de las cuales $\frac{dx_2}{dx_1}$, es decir, $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, es igual a una raiz k cualquiera de la ecuación

$$| - k a_{ij}(x_1, x_2) + b_{ij}(x_1, x_2) | = 0.$$

Consideramos aquí que $\varphi\,(x_1, x_2) = \text{const.}$ es la ecuación de la línea característica.

Problema. Demuestre que para una transformación suave no degenerada de las coordenadas, la superficie característica del sistema (2,3) se convierte en la superficie característica del sistema transformado, es decir, las características son invariantes respecto a una transformación no degenerada de las coordenadas.

4. Para sistemas no lineales de la forma

$$\Phi_i\left(x_0, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_N, \ldots, \frac{\partial^k u_j}{\partial_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right) = 0 \tag{13,3}$$

$$(i, j = 1, \ldots, N;\quad k = k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j)$$

la *ecuación característica* se define de la siguiente manera

$$\left| \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n = n_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^{n} u_j}{\partial x_0^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right\}} \alpha_0^{k_0} \cdots \alpha_n^{k_n} \right| = 0 \tag{14,3}$$

La superficie

$$\varphi(x_0, \ldots, x_n) = 0 \tag{15,3}$$

se llama *característica* para el sistema (13,3) y para la *solución dada* $u_1, u_2, \ldots, u_N$ de este sistema, si en todo punto de esta superficie y para las funciones consideradas $u_1, u_2, \ldots, u_N$ se cumple la siguiente identidad:

$$\left| \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^n u_j}{\partial x_0^{k_0} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right\}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right)^{k_0} \cdots \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^{k_n} \right| = 0.$$

Análogamente se definen las *direcciones características* del sistema (13,3) en un punto dado del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$ para la solución dada $u_1, u_2, \ldots, u_N$. En el caso de sistemas no lineales, sólo tiene sentido hablar de la dirección característica del hiperplano

$$\sum \alpha_k (x_k - x_k^0) = 0$$

en el punto dado, si nos referimos a una solución determinada $u_1, u_2, \ldots, u_N$ del sistema (13,3) ya que los coeficientes de la ecuación (14,3) dependen, en este caso, en general, de las funciones u_i y de sus derivadas hasta el orden n_i.

Con un procedimiento análogo al utilizado en el subepígrafe anterior se puede demostrar lo siguiente: Supongamos que en una superficie analítica están dadas las condiciones de Cauchy y supongamos que todas las funciones definidas en esa superficie son analíticas. Puesto que después de pasar a las coordenadas $\xi_0; \xi_1, \ldots, \xi_n$ el sistema deja de ser lineal, obtendremos para $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ un sistema no lineal de ecuaciones; designémoslo por Σ.

Este sistema tiene, en general, varias soluciones respecto a $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, consideradas como funciones de las variables independientes $\xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \cdots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Supongamos que en un entorno de la hipersuperficie $\xi_0 = 0$ y para los valores de u_j y de sus derivadas definidas sobre aquélla hemos escogido para $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ un sistema cualquiera de funciones analíticas de $\xi_0 \ldots, \xi_n, \ldots, u_j, \ldots, \dfrac{\partial^k u_j}{\partial \xi_0^{k_0} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}$, $k = \sum k_s \leqslant n_j$, $k_0 < n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, que satisface las ecuaciones de $\sum$. De ese modo determinaremos los valores de $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ en la superficie S a partir de las condiciones iniciales del problema generalizado de Cauchy definidas en la misma. Volviendo a las coordenadas $x_0, \ldots, x_n$ obtendremos en la superficie S los valores de todas las funciones u_i y de todas sus derivadas respecto a $x_0, \ldots, x_n$ hasta el orden n_i. Sustituyéndolas por u_i y sus derivadas en la ecuación (14,3), obtendremos una ecuación totalmente determinada para $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Por consiguiente, podremos de ese modo determinar las direcciones características en cada punto $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de la superficie S. Supongamos que la superficie S no tiene dirección característica en ningún punto. Entonces se puede demostrar que el problema generalizado de Cauchy, planteado de ese modo para el sistema (13,3), tiene una solución analítica única para los valores de $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ seleccionados de esta manera en S.

§ 4. SOBRE LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY EN LA CLASE DE FUNCIONES NO ANALÍTICAS

1. Del teorema de Kovalevskaya se deducen la existencia y la unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones analíticas, si las condiciones analíticas de Cauchy se dan en una superficie analítica S, que no tiene dirección característica en ningún punto. De los razonamientos realizados en los §§ 2 y 3 se deduce que si todas las funciones que figuran en las ecuaciones dadas y en las condiciones iniciales toman valores reales para valores reales de los argumentos, las soluciones del problema de Cauchy también serán reales. Surge la cuestión: ¿No habrá en este caso otras soluciones del problema de Cauchy que la solución analítica de Kovalevskaya? Para que un sistema de funciones $(u_1, \ldots, u_N)$ sea solución del problema de Cauchy no es necesario exigir, en el caso real, que todas las funciones u_i sean analíticas y, además, es suficiente que tengan derivadas de los órdenes que figuran en las ecuaciones consideradas. A pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos destacados, esta cuestión hasta ahora no ha sido resuelta.

En 1901 Holmgren demostró la unicidad de la solución del problema de Cauchy para las condiciones iniciales (10,3) y los sistemas de ecuaciones lineales de la forma (9,3) con coeficientes analíticos, en la clase de funciones con derivadas continuas de todos los órdenes que figuran en el sistema considerado.

Hagamos la demostración de este teorema.

Para simplificar la exposición, supondremos que el número de variables independientes es igual a dos, aunque la misma demostración, en esencia, es aplicable a cualquier número de variables independientes. Supongamos también que el sistema considerado es de primer orden. De acuerdo con lo dicho en el § 2 el caso general se reduce a éste. Sean $\widetilde{x}$ e y las variables independientes y supongamos, primeramente, que el problema de Cauchy se plantea para el tramo de la recta $\widetilde{x} = 0$ que contiene el origen de coordenadas.

Es decir, consideramos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial z_i}{\partial \widetilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\widetilde{x}, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\widetilde{x}, y) z_j + C_i(\widetilde{x}, y) \qquad (1,4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

y las condiciones iniciales

$$z_i(0, y) = \varphi_i(y). \qquad (2,4)$$

A_{ij}, B_{ij}, C_i son funciones analíticas de sus argumentos en cierta vecindad del origen de coordenadas. Supongamos que en un entorno del origen de coordenadas hay dos soluciones del sistema (1,4) que satisfacen las mismas condiciones iniciales (2,4) y que constan de las funciones $z_1, \ldots, z_n$ (primera solución) y $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ (segunda solución), cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Es necesario demostrar que estas soluciones son iguales en cierta vecindad del origen de coordenadas.

Supongamos que

$$z_i - \widetilde{z}_i = \widetilde{u}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces, todas las $\widetilde{u_i}$ son, en un entorno de O, funciones derivables que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial \widetilde{x}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\widetilde{x}, y) \frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\widetilde{x}, y) \widetilde{u_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

y las condiciones iniciales

$$\widetilde{u_i}(0, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Demostremos que todas las $\widetilde{u_i} \equiv 0$ en un entorno del punto O (0,0). Introduzcamos en lugar de $\widetilde{x}$ la nueva variable independiente

$$x = \widetilde{x} + y^2$$

y consideremos

$$u_i(x, y) = \widetilde{u_i}(\widetilde{x}, y) = \widetilde{u_i}(x - y^2, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces las funciones u_i verificarán el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 2y \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x - y^2, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \\ + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x - y^2, y) u_j \quad (3,4)$$

o bien, despejando en este sistema las derivadas respecto a x e introduciendo nuevas notaciones, obtendremos

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x, y) u_j \quad (4,4)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

(La posibilidad de despejar en el sistema (3,4) las derivadas indicadas se deduce del hecho de que el determinante del sistema no puede ser cero en un entorno del origen de coordenadas O del plano (x, y). ¡Compruébese!) Los coeficientes a_{ij} y b_{ij} son analíticos en un entorno del punto O. Las funciones u_i son derivables en un entorno de O y se anulan en la parábola $y^2 = x$. Demostraremos que todas las $u_i \equiv 0$ en un entorno de O para $x > y^2$. Con esto quedará probado que todas las $\widetilde{u}_i \equiv 0$ en un entorno de O para $\widetilde{x} > 0$. El caso $\widetilde{x} < 0$ se reduce al caso $\widetilde{x} > 0$ sustituyendo $\widetilde{x}$ por $-\widetilde{x}$.

Tracemos la recta $x = a$ ($a > 0$; fig. 1) y denotemos con H_a la región comprendida entre el segmento l_a de esta recta y la parte K_a de la parábola $y^2 = x$. Si a es suficientemente pequeño, todas las funciones u_i son continuas al igual que sus derivadas parciales de primer orden, incluso hasta la frontera H_a. (decimos que una función definida en la región H es continua incluso hasta la frontera H^* de esta región, si se puede extender la función a H^* de manera que la función obtenida sea continua en $H + H^*$).

Denotemos, para abreviar,

$$F_i(u) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$G_i(v) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial v_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y} (a_{ji} v_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

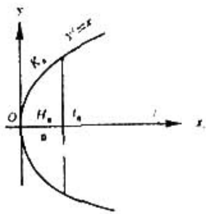

Fig. 1

Supongamos que en H_a se tienen dos funciones u_i y v_i continuas incluso hasta la frontera H_a, al igual que sus primeras derivadas parciales. Entonces, la integración por partes da

$$\iint_{H_a}\Big\{\sum_{i=1}^{n}[v_iF_i(u)+u_iG_i(v)]\Big\}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{H_a}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\frac{\partial(u_iv_i)}{\partial x}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(a_{ij}u_jv_i)}{\partial y}\Big]\Big\}\,dx\,dy=$$

$$=\int_{l_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy+\int_{K_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy+\int_{K_a}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_jv_idx, \quad (5,4)$$

donde el contorno que limita a H_a (es decir, K_a+l_a), se recorre en la dirección positiva. Si, en particular, u_i es el sistema de soluciones de las ecuaciones (4,4) determinado anteriormente y si el sistema de funciones $v_1, \ldots, v_n$ satisface las ecuaciones

$$G_i(v)=0 \quad (i=1,\ldots,n), \tag{6,4}$$

entonces de (5,4) se obtiene

$$\int_{l_a}\sum_{i=1}^{n}u_iv_idy=0. \tag{7,4}$$

Recurramos ahora a algunos resultados obtenidos al realizar la demostración del teorema de Kovalevskaya para un sistema de ecuaciones lineales. Utilicemos las observaciones 1 y 2 del § 2 y resolvamos el sistema de ecuaciones (6,4) en un entorno del punto

$(a, 0)$, tomando como condiciones iniciales para l_a todos los sistemas posibles de polinomios. La constante M puede ser tomada igual a la constante M^*, definida en la observación 1 del § 2 y común para todos los puntos $(a, 0)$. Entonces, en virtud de la observación 2 del § 2, podemos afirmar que, si a es suficientemente pequeño, todas las funciones que constituyen la solución del sistema (6,4) y verifican las condiciones iniciales establecidas, son, desde luego, definidas y analíticas en H_a y, por consiguiente, son continuas incluso hasta la frontera H_a al igual que sus derivadas parciales.

De modo que la igualdad (7,4) se verifica si $0 < a < a_0$ (a_0 es un número positivo fijo) y todas las v_i son polinomios cualesquiera. Fijemos un a que cumpla esta condición y sea s_a la longitud del segmento l_a. Según el conocido teorema de Weierstrass, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un sistema de polinomios v_i $(i = 1, \ldots, n)$, tales que en todos los puntos de l_a se tiene

$$|u_i - v_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8,4}$$

De acuerdo con las fórmulas (7,4) y (8,4),

$$\int\limits_{a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy =$$

$$= \int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \, dy + \int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i - v_i) \, dy \leqslant \varepsilon s_a \sum_{i=1}^{n} \max_{l_a} |u_i|,$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad de ε, obtendremos

$$\int\limits_{l_a} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \, dy = 0,$$

es decir, todas las $u_i \equiv 0$ en l_a, siempre que $0 < a < a_0$. Con esto queda demostrado el teorema de Holmgren.

Aplicando este teorema y mediante un cambio de variables independientes, es fácil demostrar la unicidad de la solución del problema generalizado de Cauchy, con las suposiciones anteriores respecto al sistema (1,4) y para el caso en que las condiciones iniciales se den sobre una línea analítica que no tiene dirección característica en ningún punto. Un teorema análogo es válido para sistemas lineales con un número mayor de variables independientes, cuando las condiciones iniciales se dan para una superficie analítica S; sólo es necesario que la superficie S no tenga dirección característica en ningún punto. De las funciones que constituyen la solución se puede exigir que estén definidas solamente de un lado de S y que sean continuas, al igual que sus derivadas parciales de primer orden, incluso hasta S. Si para estas condiciones, dos soluciones son iguales en S, también lo son en una vecindad de S.

Observación. Se puede describir de una manera más exacta la región del plano $(\tilde{x}, y)$ donde la solución del problema de Cauchy para el sistema (1,4) se determina unívocamente por las condiciones iniciales (región de unicidad). Supongamos que estas condiciones iniciales se plantean para el segmento AB del eje $\tilde{x} = 0$ y las soluciones se consideran a la derecha de este eje. Tracemos, por los puntos A y B y hacia la derecha, las características más próximas al segmento AB. Entonces se puede demostrar que la región comprendida entre el segmento AB y estas dos características es la región de unicidad de la solución del problema de Cauchy. Análogamente se determina la región de unicidad para el caso en que el número de variables independientes es mayor (véanse los §§ 10 y 12, donde el problema de Cauchy se resuelve para ecuaciones hiperbólicas).

2. Después de la demostración del teorema de Holmgren, Hadamard comprobó que el problema de la unicidad, en una vecindad de S, *de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones no* lineales se reduce fácilmente al problema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para ecuaciones lineales con coeficientes suficientemente suaves pero no necesariamente analíticos. Por eso todos los esfuerzos posteriores fueron concentrados en la resolución de este último problema. En 1938, Carleman lo solucionó para un sistema de ecuaciones en derivadas parciales con dos variables independientes. El teorema de Carleman consiste en lo siguiente.

Sea

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x, y) \frac{\partial z_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x, y) z_j = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9,4}$$

un sistema de ecuaciones. Las funciones A_{ij}, B_{ij} están dadas en una región cerrada $\overline{G}$ del semiplano $x \geqslant 0$, adyacente al segmento $|y| \leqslant a$ del eje de las ordenadas; las A_{ij} tienen en $\overline{G}$ derivadas *acotadas hasta el segundo orden inclusive; las B_{ij} están acotadas* en $\overline{G}$.

Entonces, la solución (en $\overline{G}$) del sistema (9,4) que satisface las condiciones

$$z_i(0, y) = 0 \text{ para } |y| \leqslant a \quad (i = 1, \ldots, n)$$

y que tiene primeras derivadas continuas respecto a x e y, es idénticamente nula en una región $\overline{G'}$ (que forma parte de $\overline{G}$) adyacente al segmento $|y| \leqslant a$. Se supone que en cada punto de $\overline{G}$ todas las raíces del determinante

$$| A_{ij} - \lambda \delta_{ij} |$$ [8]

son distintas entre sí, es decir, que en ningún punto de la región $\overline{G}$ hay direcciones características coincidentes.

Un resultado análogo para sistemas con muchas variables independientes ha sido obtenido últimamente por Calderón.[9]

Si las direcciones características coinciden, el problema de Cauchy puede no tener solución única; esto lo demostró por primera vez A. D. Myshkis (1947). Myshkis consideró el ejemplo del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_1(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= a_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{10,4}$$

que tiene una solución u_0, v_0 tal que las funciones u_0 y v_0 tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, son iguales a cero en la recta $x = 0$, pero son distintas de cero en cualquier entorno del origen de coordenadas. Los coeficientes del sistema están definidos y son derivables en todo el plano; sus derivadas

---

[8]
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

[9] Calderón, American Journal of Mathematics 80, Nº 1 (1958), 16 - 36.

son discontinuas en $x = 0$ y para estos valores de x la ecuación característica tiene raíces iguales.[10]

En 1954 Plis construyó un nuevo ejemplo de sistema del tipo (10,4) que ofrece una solución no trivial del problema de Cauchy siendo las condiciones iniciales nulas para $x = 0$; además, los coeficientes del sistema tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden en todo el plano.[11]

La unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones suficientemente suaves está demostrada para ecuaciones hiperbólicas y para sistemas hiperbólicos con un número arbitrario de variables independientes (sobre esos sistemas hablaremos después), así como para una clase amplia de ecuaciones y sistemas elípticos (véase § 5); existe una amplia bibliografía referente a la última cuestión.

La cuestión que nos interesa sobre la unicidad de la solución del problema de Cauchy en la clase de funciones no analíticas, pero suficientemente suaves, está relacionada con la posibilidad de extender de un modo único la solución suficientemente suave $(u_1, \ldots, u_N)$ del sistema (13,3), definida en una región real del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$ que se encuentra a un lado de la superficie S, suficientemente suave por no tener dirección característica en ningún punto. En efecto, al definir las funciones u_i de un lado de la superficie S y en esta misma superficie, quedan definidos los valores en esta superficie de las propias funciones u_i y de sus derivadas, que figuran en las condiciones de Cauchy. Por lo tanto,

---

10 Véase A. D. Myshkis, Logros de las ciencias mat. 3 : 2(1948). p. 3 - 46.

11 Plis, Bull. Acad. Polon. Sci. 2(1954), 55 - 57.

el problema sobre la extensión de las funciones u_i al otro lado de la superficie S se reduce a determinar la solución del problema generalizado de Cauchy en la región situada al otro lado de la superficie S. Como hemos señalado, el problema sobre la unicidad de esta solución no ha sido esclarecido totalmente hasta ahora.

Del mismo modo, hasta ahora queda sin resolver el problema de la posibilidad de extender de diversas maneras una solución real $(u_1, \ldots, u_N)$ suficientemente suave del sistema (13,3), definida en una región real del espacio $(x_0, \ldots, x_n)$, situada a un lado de una superficie suficientemente suave S y sobre esta misma superficie, y también en el caso en que esta superficie S sea característica del sistema dado y de la solución dada. Para todas las ecuaciones que vamos a considerar es siempre posible realizar esta extensión de muchas maneras.

La cuestión de la no unicidad de la extensión de la solución del sistema (13,3) más allá de la característica es equivalente a la cuestión de la existencia de más de una solución del problema generalizado de Cauchy, si las condiciones de Cauchy, planteadas para la característica, son tales que, en general, permiten al menos una solución de este tipo. Hemos visto que para esto las funciones u_i definidas sobre la característica y sus derivadas deben verificar, en general, ciertas relaciones. Estas condiciones se cumplen de antemano si existen funciones $u_1, \ldots, u_N$, que satisfagan las ecuaciones dadas por un lado cualquiera de la característica.

Si nos interesamos solamente por las soluciones analíticas, la cuestión de la unicidad de la extensión más allá de la característica, así como, en general, más allá de cualquier superficie, dada en una región de solución $(n + 1)$–dimensional, tiene solución siempre en el sentido de que esa extensión es única, ya que una función analítica de $n + 1$ variables independientes queda totalmente determinada por sus valores en una región $(n + 1)$–dimensional tan pequeña como se quiera.

3. En el 3 del § 3 hemos visto que si la superficie S, en la cual se definen las condiciones de Cauchy, no tiene dirección característica en ningún punto, estas condiciones de Cauchy conjuntamente con las ecuaciones del sistema (7,3) determinan unívocamente en S los valores de todas las funciones u_i y de todas sus derivadas hasta el orden n_i. En cambio, si la superficie S es característica en un entorno del punto A, las condiciones de Cauchy definidas en la misma admiten distintos sistemas de valores $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ que pueden satisfacer el sistema (7,3) si admiten al menos un sistema de valores del tipo $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ (aquí hemos aceptado que la ecuación $\xi_0 = 0$ es la ecuación de la superficie S). Por eso, pueden existir funciones tales que satisfagan las ecuaciones (7,3) en todos los puntos de una región dentro de la cual hay un trozo de la superficie característica, teniendo las derivadas $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ en esta superficie discontinuidades del primer tipo. Al acercarse a S por distintos lados, estas derivadas se aproximan a los distintos valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones (7,3) en la superficie S. Si la superficie S no fuera característica, las derivadas $\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial \xi_0^{n_i}}$ no podrían tener en la misma discontinuidades del

primer tipo, siendo continuos los coeficientes de las ecuaciones (7,3) y todas las derivadas de las funciones u_i de la forma

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_0^{k_0} \partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_n^{k_n}};$$

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_i, \quad k_0 < n_i.$$

Para los sistemas no lineales son válidas afirmaciones similares.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0; \tag{11,4}$$

para la cual las líneas

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}$$

son características.

Es evidente que toda función de la forma

$$u = f(y),$$

satisface la ecuación (11,4), donde $f(y)$ es una función cualquiera que tiene derivada en todos los puntos. En particular, se puede suponer que la función $u = f(y)$ es tal que su segunda derivada es continua en todos los puntos a excepción de un punto donde tiene discontinuidad de primer tipo. Entonces, obtendremos una solución de la ecuación (11,4) cuyas segundas derivadas parciales tienen discontinuidad de primer tipo en la característica.

A continuación nos dedicaremos fundamentalmente al estudio de: ecuaciones de *segundo* orden con una función incógnita o bien de sistemas de cualquier orden con un número cualquiera de funciones incógnitas, pero con derivadas parciales sólo respecto a *dos* variables independientes. Las ecuaciones mencionadas se pueden reducir a una forma "canónica" simple. A esta reducción dedicamos los siguientes epígrafes.

§ 5. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA EN UN PUNTO Y CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN CON UNA FUNCIÓN INCÓGNITA

1. Consideremos la ecuación lineal de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + C(x_1, \ldots, x_n)\, u + F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (1,5)$$

con una función incógnita u. Consideremos además que $A_{ij} = A_{ji}$. Todas las funciones A_{ij}, B_i, C, F son reales y están determinadas en una región G del espacio $(x_1, \ldots, x_n)$.

Hagamos un cambio de variables independientes planteando

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2,5)$$

donde a_{ki} son ciertas constantes. Suponemos que la transformación (2,5) es no degenerada, es decir, que el determinante $|a_{ki}|$ no es igual a cero. Entonces la transformación de x_k a ξ_k es unívoca en ambos sentidos. La ecuación (1,5) respecto a las variables independientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se escribe así:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} a_{ki} a_{lj} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = 0\,[12]. \qquad (3,5)$$

[12] Para estar seguros que se puede pasar, aplicando las reglas corrientes, de las derivadas respecto a las variebles independientes x_i $(i = 1, \ldots, n)$ a las derivadas respecto a las variables independientes ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$, es suficiente suponer que la función u tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive.

Hemos escrito sólo los miembros de la función incógnita u que tienen derivadas de segundo orden. De la igualdad (3,5) se desprende que al realizar el cambio de variables independientes según las fórmulas (2,5), los coeficientes de las derivadas de segundo orden de u varían de la misma manera que los coeficientes de la forma cuadrática

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j \tag{4,5}$$

cuando se sustituye x_k por ξ_k según las fórmulas

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{5,5}$$

Los coeficientes A_{ij} de la fórmula (4,5) se consideran constantes e iguales a los valores de los coeficientes A_{ij} $(x_1, \ldots, x_n)$ de la ecuación (1,5) en un punto cualquiera $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G.

En el álgebra se demuestra la existencia de una transformación real no degenerada (5,5) que reduce toda forma (4,5) con coeficientes reales A_{ij} a la forma

$$\sum_{i=1}^{m} \pm \xi_i^2, \text{ donde } m \leqslant n. \tag{6,5}$$

Existen muchas transformaciones reales no degeneradas (5,5) que llevan la forma (4,5) a la forma (6,5), pero el número de términos con signos positivos y el número de términos con signos negativos de la forma (6,5) está determinado únicamente por la forma (4,5) y no depende de la selección de la transformación no degenerada (5,5). (Ley de inercia de las formas cuadráticas).[13]

El determinante $|A_{ik} - \lambda\delta_{ik}|$ tendrá sólo raíces reales. El número de términos con signos positivos y el número de términos con signos negativos en la forma (6,5) es igual al número de raíces λ positivas y negativas, respectivamente, de este determinante.

Si encontramos una transformación (5,5) que lleve la forma (4,5) a la forma (6,5), la transformación (2,5), cuya matriz es la traspuesta de la inversa a la matriz (a_{ik}), reducirá la ecuación (1,5) a la forma

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^*_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \ldots = 0, \qquad (7,5)$$

donde

$$\overset{*}{A}_{ij}(\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n) = \pm 1, \text{ si } i = j \leqslant m,$$
$$\overset{*}{A}_{ij}(\overset{0}{x}_1, \ldots, \overset{0}{x}_n) = 0, \text{ si } i \neq j \text{ o si } i = j > m.$$

Hemos señalado aquí sólo los términos con derivadas de orden superior de la función u. La forma (7,5) de la ecuación (1,5) se llama *forma canónica en el punto* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Por lo tanto, para cada punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G se puede indicar una transformación no degenerada (2,5) de las

[13] Véase A. G. Kurosh, Curso de álgebra superior, Fizmatguiz, 1959, § 27; I. M. Gelfand, Lecciones sobre álgebra lineal, Gostiejizdat, 1951, p. 143.

variables independientes que reduce la ecuación (1,5) a la forma canónica en este punto.

En general, para cada punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ existe una transformación (2,5) que reduce la ecuación (1,5) a la forma canónica en este punto; en otros puntos esta transformación puede no reducir la ecuación a la forma canónica. Diferentes ejemplos permiten afirmar que en el caso en que el número de variables independientes es mayor que dos, no existe, hablando en general, una transformación lineal con coeficientes constantes de las variables independientes, ni ninguna otra transformación no degenerada de las variables, que reduzca la ecuación lineal dada de segundo orden a la forma canónica, *incluso en una región tan pequeña como se quiera.* En el caso de dos variables independientes existe una transformación de este tipo para suposiciones muy generales respecto a los coeficientes de la ecuación (1,5), como se demostrará en el siguiente epígrafe.

La clasificación de las ecuaciones de segundo orden está basada en la posibilidad de reducir la ecuación (1,5) a la forma canónica en un punto.

2. La ecuación (1,5) se llama *elíptica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si en la ecuación (7,5) todos los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ son distintos de cero y tienen un mismo signo.

La ecuación (1,5) se llama *hiperbólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si en la ecuación (7,5) todos los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tienen un mismo signo a excepción de un A_{ii}^* que tiene el signo contrario, siendo además $m = n$.

La ecuación (1,5) se llama *ultrahiperbólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si en la ecuación (7,5) se tiene más de un $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ positivo y más de un $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ negativo, siendo $m = n$.

La ecuación (1,5) se llama *parabólica en sentido amplio* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si entre los $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots x_n^0)$ hay algunos iguales a cero, es decir, si $m < n$.

La ecuación (1,5) se llama *parabólica en sentido restringido* o simplemente *parabólica* en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si sólo uno de los coeficientes $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (sea éste A_{11}^*), es igual a cero mientras que todos los demás $A_{ii}^*(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ tienen signos iguales y el coeficiente de $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_1}$ es distinto de cero.

La ecuación (1,5) se llama *elíptica, hiperbólica, ultrahiperbólica,* etc., *en toda la región* G si es elíptica, hiperbólica, ultrahiperbólica, etc., respectivamente, en cada punto de la región G.

En las aplicaciones aparecen a veces ecuaciones que en una parte G_1 de la región considerada G son elípticas, y en otra parte G_2 de la región G son hiperbólicas. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones de tipo mixto. Un caso particular de estas ecuaciones es la ecuación de Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

siempre que se considere en una región G que contenga los puntos del eje x.[14]

---

[14] Las ecuaciones de tipo mixto han sido estudiadas por primera vez en los trabajos de Tricomi (véase su libro "Sobre ecuaciones lineales de tipo mixto"). Estas ecuaciones despertaron interés especial cuando se encontró la relación que tienen con la dinámica de los gases (véase *F. I. Frankl,* Noticias de la A C de la U R S S, serie matemática 9 (1945), 121 - 143). En los últimos años aparecieron muchos trabajos dedicados a ecuaciones de tipo mixto (Véase *A. V. Bizadze,* Ecuaciones de tipo mixto, Edición de la A C de la U R S S, 1959, donde viene una extensa bibliografía).

3. Una ecuación no lineal de segundo orden

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots\right) = 0$$

con una función incógnita u se llama, *para una solución dada* $u^*(x_1, \ldots, x_n)$, elíptica, hiperbólica o parabólica en sentido amplio en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ correspondientemente en la región G, si la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

donde

$$A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}} \tag{8,5}$$

es elíptica, hiperbólica o parabólica en sentido amplio en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, correspondientemente en la región G. En el miembro derecho de (8,5) en lugar de las funciones u y sus derivadas, figura la función $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ y sus derivadas respectivas.

A continuación vamos a estudiar solamente ecuaciones lineales de segundo orden con una función incógnita, que pueden ser elípticas, hiperbólicas, o bien parabólicas en toda la región. No estudiaremos las ecuaciones ultrahiperbólicas, ya que estas ecuaciones no se encuentran ni en la física ni en la técnica. Tampoco vamos a estudiar las ecuaciones que son parabólicas en el sentido amplio pero no lo son en el sentido restringido. Por eso, al hablar en el capítulo 4 de ecuaciones parabólicas nos referiremos solamente a ecuaciones parabólicas en sentido restringido.

§ 6. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA, EN LA VECINDAD DE UN PUNTO, DE UNA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN RESPECTO A DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

1. Consideremos la ecuación

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \text{ [15]} \tag{1,6}$$

donde los coeficientes A, B, C son funciones de x e y con derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Supondremos que A, B, C, no se anulan simultáneamente y que la función $u(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Pasemos de las variables independientes x e y a las variables independientes ξ y η. Sean

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y) \tag{2,6}$$

funciones dos veces derivables y tales que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

no se anula en ningún punto de la región considerada. Entonces, el sistema (2,6) se puede resolver unívocamente respecto a x e y en una región del plano (ξ, η). Las funciones obtenidas $x(\xi, \eta)$

[15] En este epígrafe consideramos ecuaciones de tipo más general que las lineales, ya que todos los razonamientos que se emplean para reducir a la forma canónica la ecuación lineal son aplicables también a estas ecuaciones.

e $y(\xi, \eta)$ son también funciones dos veces derivables. Con las nuevas variables independientes, la ecuación (1,6) se escribe así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left[A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\left[A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + B\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left[A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (3,6)$$

Comprobemos que en cierta vecindad G del punto fijo (x_0, y_0) las funciones $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ se pueden escoger de modo que la ecuación (3,6) tenga la forma canónica en cada punto de esta vecindad. Tendremos que investigar por separado los casos siguientes: cuando en el punto considerado $B^2 > AC$, $B^2 < AC$ o cuando en cierta vecindad de este punto $B^2 \equiv AC$. No consideraremos los casos en que la expresión $B^2 - AC$ cambia de signo o se hace idénticamente nula en cualquier vecindad del punto escogido.

2. Consideremos primero el caso en que $B^2 > AC$ en toda la región considerada, es decir, cuando la ecuación (1,6) es hiperbólica (véase la definición en el epígrafe anterior). Podemos considerar que en el punto (x_0, y_0), en cuya vecindad queremos reducir la ecuación (1,6) a la forma canónica, o bien $A \neq 0$, o bien $C \neq 0$. En caso contrario, podríamos obligar a que así sea introduciendo las nuevas variables:

$$x = x' + y',$$
$$y = x' - y'.$$

Consideremos la ecuación

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{4,6}$$

Sea $A \neq 0$. Puesto que $B^2 - AC > 0$, la ecuación (4,6) puede ser escrita en la forma

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (-B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times$$
$$\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x} - (-B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] = 0,$$

y, por eso, las soluciones de cada una de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} &= (-B - \sqrt{B^2 - AC})\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y},\\ A\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= (-B + \sqrt{B^2 - AC})\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{5,6}$$

satisfacen la ecuación (4,6).

Definamos las funciones $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ como las soluciones de las ecuaciones (5,6) que toman valores dados en las líneas l_i $(i = 1, 2)$ que pasan por el punto (x_0, y_0) y que no son tangentes en ningún punto a las características de la ecuación correspondiente.[16] Si las líneas l_i y los valores que en las mismas toman

[16] Véase el § 53 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", edición 1952. Llamo la atención sobre el hecho de que en el caso de dos variables independientes la definición de característica que hemos dado en el § 3 del presente libro coincide con la definición

las funciones φ_i se escogen suficientemente suaves, obtendremos unas soluciones $\varphi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ que tienen derivadas continuas respecto a x e y hasta el segundo orden inclusive. Si suponemos además que los valores iniciales de $\varphi_i(x, y)$ en l_i se escogen de manera que la derivada de φ_i en la dirección de l_i no se anule en el punto (x_0, y_0), las derivadas parciales de la función $\varphi_i(x, y)$ respecto a x e y no pueden anularse simultáneamente en ese punto (en caso contrario, la derivada en este punto sería igual a cero en cualquier dirección).

Como que $A \neq 0$, de las ecuaciones (5,6) se desprende que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \neq 0$ y $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \neq 0$ en la vecindad del punto (x_0, y_0) y que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

En virtud de la condición $B^2 - AC \neq 0$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \neq \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} : \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

De aquí se infiere que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{6,6}$$

de característica que viene en el § 53 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias". Pero, en el caso de un número mayor de variables independientes, estas dos definiciones son totalmente distintas.

es distinto de cero en cierta vecindad G del punto (x_0, y_0). Por eso, en esta vecindad, podemos tomar en las igualdades (2,6)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

En el miembro izquierdo de (3,6) desaparecen entonces los términos que contienen $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ es *distinto de cero* en toda la región considerada G; en el caso contrario, al pasar de las coordenadas (x, y) a las coordenadas (ξ, η), el orden de la ecuación se reduce; por consiguiente, al pasar de las coordenadas (ξ, η) a las coordenadas (x, y) el orden de la ecuación en un punto de la región aumenta, lo cual, como es evidente no puede suceder.

Dividiendo la ecuación (3,6) por el coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, encontraremos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{8,6}$$

en la vecindad G del punto (x_0, y_0). Esta forma de la ecuación también se llama canónica.

Haciendo $\xi = \alpha + \beta$ y $\eta = \alpha - \beta$, reduciremos la ecuación (8,6) a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{9,6}$$

Después de reducir una ecuación hiperbólica a la forma canónica (8,6), se puede a veces integrar en forma cerrada, es decir, hallar una fórmula que dé todas las soluciones de esta ecuación.

Ejemplo 1. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{10,6}$$

mediante el cambio de variables

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{2}$$

se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \tag{11,6}$$

Denotando $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ mediante v, obtendremos $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, es decir, $v = f(\eta)$, donde f es una función arbitraria de η. Considerando en la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$$

ξ como un parámetro e integrando esta ecuación, obtendremos:

$$u = \int f(\eta) \, d\eta + C(\xi)$$

o bien

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + y) + \psi(x - y), \tag{12,6}$$

donde φ y ψ son funciones arbitrarias dos veces derivables.

Ejemplo 2. Si en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = \frac{1}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (\xi \neq 0) \tag{13,6}$$

tomamos

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$$

tendremos

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{2\xi} v.$$

Esta ecuación se integra fácilmente separando las variables. Puesto que η figura en v como parámetro, la constante de integración será una función de este parámetro. Obtendremos:

$$\ln |v| = \frac{1}{2} \ln |\xi| + \ln |C(\eta)|$$

o bien

$$v = \frac{\partial u}{\partial \eta} = C(\eta) \sqrt{|\xi|}$$

donde

$$u = C_1(\eta) \sqrt{|\xi|} + C_2(\xi).$$

Aquí

$$C_1(\eta) = \int C(\eta)\, d\eta$$

es una función de η arbitraria [ya que es arbitraria $C(\eta)$] y derivable, mientras que $C_2(\xi)$ es una función arbitraria de ξ.

3. Si

$$B^2 = AC$$

en toda la región considerada, la ecuación (1,6) es parabólica en esa región (véase la definición en el epígrafe anterior). Suponemos que en la región considerada los coeficientes A, B, C de la ecuación (1,6) no se anulan simultáneamente. En virtud de la condición $B^2 = AC$, de la suposición anterior se deduce que en cada punto de esta región uno de los coeficientes, A o C, es distinto de cero. Sea, por ejemplo, $A \neq 0$ en el punto considerado (x_0, y_0). Entonces, ambas ecuaciones (5,6) son iguales y se convierten en la ecuación

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{14,6}$$

Puesto que $B^2 = AC$ toda solución de la ecuación (14,6) satisface también la ecuación

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{15,6}$$

Podemos, como en el subepígrafe anterior, determinar una solución $\varphi(x, y)$ de la ecuación (14,6) de modo que la función $\varphi(x, y)$ tenga derivadas continuas de segundo orden y que sus primeras derivadas no se anulen simultáneamente en una vecindad G del punto (x_0, y_0). Podemos además considerar que $A \neq 0$ en toda la región G.

Sea

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

una familia de curvas en la región G tal que la función $\psi(x, y)$ tiene derivadas continuas de segundo orden y que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{16,6}$$

no se anula en ningún punto de la región G. (Como que en G $A \neq 0$ y, por consiguiente, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, se puede tomar, por ejemplo, $\psi(x, y) \equiv x$). Pongamos en las fórmulas (2,6).

$$\xi = \varphi(x, y) \text{ y } \eta = \psi(x, y).$$

Entonces el coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ en la ecuación (3,6) se anula.

El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ se hace igual a

$$\left(A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(B \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

De acuerdo con (14,6) y (15,6), este último también es idénticamente nulo en la región G.

El coeficiente de $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ en la ecuación (3,6) se convierte en

$$A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{A} \left(A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2.$$

Esta expresión es distinta de cero, ya que, en el caso contrario, en virtud de (14,6), el jacobiano (16,6) se anularía en la región G. Por eso, la ecuación (3,6) se puede dividir por este coeficiente. Haciendo la división obtendremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \tag{17,6}$$

La ecuación (17,6) tiene forma canónica en la región G de acuerdo con la definición dada en el § 5.

Si la ecuación (1,6) es lineal, la ecuación (17,6) también lo será. Supongamos que es de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_1 u + D_1 . \tag{18,6}$$

Se puede simplificar esta ecuación introduciendo en lugar de u una nueva función z. Pongamos

$$u = zv,$$

donde $v(\xi, \eta)$ es una función de ξ y η, que definiremos más tarde. *Entonces la ecuación (18,6) se convierte en la ecuación*

$$v \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = A_1 v \frac{\partial z}{\partial \xi} + B_1 v \frac{\partial z}{\partial \eta} + C_2 z + D_1 . \tag{19,6}$$

Hemos escrito explícitamente sólo los términos que contienen derivadas de z, los términos que contienen la propia función z los hemos incluidos en $C_2 z$. Escojamos la función $v(\xi, \eta)$ de manera que en la ecuación (19,6) desaparezca la derivada $\frac{\partial z}{\partial \eta}$. Igualando a cero el coeficiente de $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, obtendremos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = A_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + C_3 z + D_2 ; \tag{20,6}$$

donde $C_3 = \frac{C_2}{v}$, $D_2 = \frac{D_1}{v}$, $v(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2} \int B_1 (\xi, \eta) d\eta}$.

4. Consideremos, finalmente, el caso en que

$$AC > B^2$$

en todos los puntos de la región considerada, es decir, el caso en que la ecuación (1,6) es elíptica en esta región (véase la definición en el § 5). Supongamos ahora que todos los coeficientes A, B y C son funciones analíticas de x e y. Entonces los coeficientes de las ecuaciones (5,6) también son funciones analíticas de x e y.

Sea

$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) + i\varphi^{**}(x, y)$$

una solución analítica de la primera de las ecuaciones (5,6) en la vecindad del punto (x_0, y_0)[17] y sea $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ en esta vecindad.

Pongamos en las igualdades (2,6)

$$\xi = \varphi^*(x, y) \text{ y } \eta = \varphi^{**}(x, y). \tag{21,6}$$

Las ecuaciones (21,6) se pueden resolver respecto a x e y, ya que el jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{22,6}$$

[17] En cierta vecindad de cualquier punto (x_0, y_0) de la región considerada, se puede encontrar una solución analítica $\varphi(x,y)$ de la ecuación (5,6) tal que en esa vecindad $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ no se anulen simultáneamente. Esto se puede hacer, de acuerdo con el teorema de Kovglevskaya, definiendo para $x = x_0$ los valores de $\varphi(x,y)$ de manera que $\varphi'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Supongamos que $\varphi(x,y)$ es precisamente la solución de este tipo.

no se anula en ningún punto. En efecto, separando en las ecuaciones (5,6) las partes real e imaginaria, obtendremos

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\xi}{\partial x} &= -B\frac{\partial\xi}{\partial y} + \sqrt{AC-B^2}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}, \\ A\frac{\partial\eta}{\partial x} &= -B\frac{\partial\eta}{\partial y} - \sqrt{AC-B^2}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (23,6)$$

Sustituyendo en el jacobiano (22,6) las expresiones de $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ obtenidas de aquí, se tiene

$$J = \frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right].$$

De aquí se ve que este determinante puede ser igual a cero sólo en los puntos donde

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0,$$

es decir, en virtud de las ecuaciones (23,6), en los puntos donde

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \text{ y } \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0.$$

Pero en la región considerada no existen tales puntos, ya que en los mismos tendríamos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Separando en la identidad

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

las partes real e imaginaria, obtendremos

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \quad (24,6)$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (25,6)$$

En virtud de que la forma

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 \quad (B^2 - AC < 0),$$

es definida, los miembros derecho e izquierdo de la igualdad (24,6) se pueden anular sólo si

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \quad (26,6)$$

Pero hemos escogido la función $\varphi(x, y)$ de un modo tal que las igualdades (26,6) no se verifican simultáneamente. Por lo tanto, en la ecuación (3,6) los coeficientes de $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ son iguales entre sí y distintos de cero; por eso, la ecuación (3,6) se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \quad (27,6)$$

Esta forma de una ecuación elíptica se llama forma canónica.

Hemos reducido la ecuación a su forma canónica en la vecindad de cierto punto (x_0, y_0) en la cual existe solución analítica de las ecuaciones (5,6) con derivadas distintas de cero. Con razonamientos más complejos se puede demostrar que esa reducción es posible sin suponer que $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ son analíticos, sino sólo suponiendo que tienen derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive.

§ 7. REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN RESPECTO A DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Consideraremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (1,7)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es indiferente que las f_i sean lineales o no lineales respecto a $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Supondremos que los coeficientes $a_{ij}(x, y)$ son reales y que en una región G del plano (x, y) tienen derivadas parciales continuas respecto a x e y hasta el orden k inclusive $(k \geqslant 1)$. Entonces, estableciendo suposiciones complementarias (que aparecen a continuación con letra cursiva) se puede reducir el sistema (1,7) a la forma canónica, en cierta vecindad de un punto arbitrario A del interior de G, mediante una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas $u_1, \ldots, u_n$ con coeficientes que tienen tantas derivadas continuas como los coeficientes $a_{ij}(x, y)$. Esta *forma canónica* es la siguiente:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \lambda_1(x, y) \frac{\partial v_1}{\partial y} + f_1^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \alpha_1(x, y) \frac{\partial v_1}{\partial y} + \lambda_1(x, y) \frac{\partial v_2}{\partial y} + f_2^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial v_{n_1}}{\partial x} = \alpha_{n_1-1}(x, y) \frac{\partial v_{n_1-1}}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial v_{n_1}}{\partial y} + f_{n_1}^*(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial x} = \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y} + f^*_{n_1+1}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial x} = \beta_1(x, y) \frac{\partial v_{n_1+1}}{\partial y} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+2}}{\partial y} + \\ + f^*_{n_1+2}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

. . . .

$$\frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial x} = \beta_{n_2-1}(x, y) \frac{\partial v_{n_1+n_2-1}}{\partial y} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial v_{n_1+n_2}}{\partial y} + \\ + f^*_{n_1+n_2}(x, y, v_1, \ldots v_n),$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial x} = \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y} + f^*_{n-n_k+1}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

$$\frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial x} = \omega_1(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+1}}{\partial y} + \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_{n-n_k+2}}{\partial y} + \\ + f^*_{n-n_k+2}(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

. . . .

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \omega_{n_k-1}(x, y) \frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + \lambda_k(x, y) \frac{\partial v_n}{\partial y} + \\ + f^*_n(x, y, v_1, \ldots, v_n). \qquad (2{,}7)$$

Aquí $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_k(x, y)$ son las raíces del determinante de la matriz

$$||a_{ij}(x, y)|| - \lambda E, \tag{3,7}$$

$a_i(x, y)$, $\beta_i(x, y), \ldots, \omega_i(x, y)$ son funciones suficientemente arbitrarias que tienen derivadas continuas hasta el orden k inclusive y que no se anulan en ningún punto de la vecindad considerada del punto A. Las funciones $v_i, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots, \omega_i, f^*, \ldots, f^*$ pueden ser, en general, funciones complejas de sus argumentos. Si las $f_1, \ldots, f_n$ tienen derivadas continuas de orden q, entonces las $f_1^*, \ldots, f_n^*$ tendrán derivadas continuas hasta el orden $\min\{q, k-1\}$ inclusive.

Los sistemas (1,7) y (2,7) difieren del sistema de ecuaciones lineales diferenciales ordinarias

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j + f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4,7}$$

con coeficientes constantes a_{ij} y del sistema canónico (13,3) correspondiente, descrito en el § 43 de mi curso de ecuaciones diferenciales ordinarias (Gostiejizdat, 1952), sólo en que en lugar de $\frac{\partial}{\partial x}$ en los miembros izquierdos de las ecuaciones ordinarias correspondientes se pone $\frac{d}{dx}$ y en lugar de $\frac{\partial}{\partial y}$, en las ecuaciones ordinarias correspondientes, se pone el factor 1. Los coeficientes del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (13,3) son constantes y las funciones f y f^* dependen sólo de una variable independiente; mientras que en las ecuaciones en derivadas parciales que estamos considerando, los coeficientes de las derivadas dependen de dos variables independientes y las funciones f y f^* dependen además de todas las funciones incógnitas.

La reducción del sistema (1,7) a la forma canónica (2,7) se *realiza con el mismo cambio de funciones incógnitas que se utiliza* en el § 44 de mi curso de ecuaciones diferenciales ordinarias para un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Sólo nos resta comprobar que en la vecindad del punto A los coeficientes de la transformación lineal descrita en el § 44 son funciones que respecto a (x, y) tienen el mismo número de derivadas continuas que los coeficientes $a_{ij}(x, y)$ del sistema (1,7). Para ello tendremos que repetir en cierto modo el § 44.

Utilizaremos el método de inducción completa. Para $n = 1$ la afirmación que queremos probar (la posibilidad de reducir el sistema (1,7) a la forma (2,7) por medio de una transformación lineal con coeficientes suaves) es evidente. Supongamos que es cierta para $n - 1$ ecuaciones. Demostremos que es cierta también para n ecuaciones.

Multipliquemos la i-ésima ecuación del sistema (1,7) por k_i, donde k_i son ciertas funciones derivables en la vecindad del punto A que definiremos más tarde. Sumemos las ecuaciones obtenidas y escribamos el resultado en la forma

$$\frac{\partial\,(\sum\limits_i k_i u_i)}{dx} =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial\,(a_{ij} k_i u_j)}{\partial y} + \sum_i k_i f_i + \sum_i u_i \frac{\partial k_i}{\partial x} - \sum_{i,j} u_j \frac{\partial\,(a_{ij} k_i)}{\partial y}.$$

Determinemos ahora las k_i de manera que respecto a u_j se cumpla la identidad

$$\sum_{i,j} a_{ij} k_i u_j \equiv \lambda \sum_i k_i u_i, \tag{5,7}$$

donde λ es una función derivable de (x, y), real o compleja. Para ello es necesario y suficiente que los coeficientes correspondientes a iguales u_j en ambos miembros de esta identidad sean iguales, es decir, que se cumpla

$$\lambda k_j = \sum a_{ij} k_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6,7}$$

Por lo tanto, para determinar $k_1, k_2, \ldots, k_n$ obtendremos un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas. Para que este sistema tenga solución no trivial —que es la única que tiene interés para nosotros— es necesario y suficiente que el determinante formado con sus coeficientes sea igual a cero. Esta condición se puede escribir así:

$$|\lambda E - ||a_{ij}||| = 0. \tag{7,7}$$

La matriz $\lambda E - ||a_{ij}||$ se llama *matriz característica del sistema* (1,7).

Sea λ_1 una de las raíces de la ecuación (7,7). *Supongamos que en la vecindad considerada del punto A cada raíz de la ecuación (7,7) tiene la misma multiplicidad para todos los puntos de esta vecindad.* Supongamos que λ_1 tiene en esta vecindad una multiplicidad α_1. Entonces, en esta vecindad, λ_1 satisface la ecuación algebraica

$$f^{(\alpha_1 - 1)}(\lambda, x, y) = 0,$$

donde $f^{(k)}(\lambda, x, y)$ es la derivada de orden k respecto a λ del miembro izquierdo de la ecuación (7,7). Además en todo punto de esta vecindad

$$f^{(\alpha_1)}(\lambda_1(x, y), x, y) \neq 0.$$

Por eso, de acuerdo con el teorema de la función implícita, $\lambda_1(x, y)$, *en la vecindad del punto* A, *tendrá el mismo número de* derivadas continuas que los coeficientes a_{ij}.

Supongamos además que en la vecindad considerada del punto A *la matriz*

$$\| a_{ij} \| - \lambda_k E, \tag{8,7}$$

donde λ_k *es raíz de la ecuación* (7,7), *tiene el mismo rango* r_k.[18] Entonces, en esta vecindad del punto A, el sistema (6,7) tiene para $\lambda = \lambda_1$ una solución que consta de funciones que no se anulan simultáneamente en ningún punto de la vecindad del punto A y tienen tantas derivadas continuas como los a_{ij}. Designémoslas por k_{1i}. Para hallar esas k_{1i}, observemos lo siguiente. Como que la matriz (8,7) es de rango r_1 en todos los puntos de la vecindad de A, el punto A tiene una vecindad en la cual n-r_1 ecuaciones del sistema (6,7) son consecuencia del resto de las r_1 ecuaciones. Por eso, todo sistema de funciones k_{1i} que satisface en una vecindad pequeña del punto A estas r_1 ecuaciones *satisfará todo el sistema* (6,7). Para hallar la solución de estas r_1 ecuaciones (las llamaremos, para abreviar, C_1), observemos lo siguiente. Puesto que el rango de la matriz (8,7) para $\lambda = \lambda_1$ es igual a r_1, con las columnas de la matriz formada por los coeficientes del sistema C_1 se puede formar una matriz cuadrada con determinante distinto de cero en una vecindad del punto A. Vamos a considerar las funciones k_{1i}, que son los factores de estas co-

[18] Es fácil de comprobar que $r_k \geqslant n - \alpha_k$. En efecto, la derivada de orden α_k respecto a λ del determinante (7,7) es, para $\lambda = \lambda_k$ una combinación lineal de menores de orden $(n - \alpha_k)$ del determinante (8,7). Pero esta derivada es distinta de cero y por eso uno de los menores de orden $(n - \alpha_k)$ de la matriz (8,7) es diferente de cero.

lumnas, constantes arbitrarias que no puedan hacerse iguales a cero simultáneamente. Para concretar, considerémoslas iguales a 1. Entonces, el sistema C_1 determina unívocamente el resto de las k_{ij} como funciones que tienen el mismo número de derivadas que los a_{ij}.

De este modo hemos encontrado en una vecindad del punto A unas funciones k_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ que no se anulan simultáneamente en ningún punto de esta vecindad y que tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{ij}. Para concretar, supongamos que $k_{11} \neq 0$ en el punto A. Es evidente que este supuesto no restringe la generalidad de la exposición, ya que siempre podemos hacer $k_{11} \neq 0$ mediante un cambio de la numeración de las u_i, lo que viene a ser una transformación lineal no degenerada de las u_i. Supongamos a continuación

$$z_1 = \sum_{j=1}^{n} k_{1j} u_j .$$

Es evidente que la función z_1 (x, y) satisface la ecuación

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n),$$

donde

$$f_1^*(x, y, z_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv$$

$$\equiv \sum k_{1i} f_i + \sum_i u_i \frac{\partial k_{1i}}{\partial x} - \sum_{i,j} u_j \frac{\partial (a_{ij} k_{1i})}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}$$

(véase la fórmula (5,7) y la igualdad anterior a esta fórmula).

Todos los razonamientos del § 44 de mi libro de ecuaciones ordinarias se aplican en lo que sigue sin variaciones esenciales.[10] Estos razonamientos se simplifican considerablemente en el caso en que todas las raíces λ de la ecuación (7,7) son distintas; hagamos la explicación completa de este caso. A cada raíz λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ de esta ecuación corresponde un sistema de funciones $k_{ij}(x, y)$, $j = 1, \ldots, n$ que se determina para λ_i del mismo modo que antes se determinaron las funciones $k_{1j}(x, y)$, $j = 1, \ldots, n$ a partir de λ_1. Las funciones $k_{ij}(x, y)$ tienen el mismo número de derivadas continuas que los $a_{ls}(x, y)$. Además

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial z_i}{\partial y} + f_i^*(x, y, u_1, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} u_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nos resta comprobar que $|k_{ij}| \neq 0$. Supongamos lo contrario, es decir, que $|k_{ij}(x^0, y^0)| = 0$ en cierto punto (x^0, y^0) de la región donde están definidas todas las $k_{ij}(x, y)$.

---

[10] Observemos que para el sistema de $n - 1$ ecuaciones, que deberemos plantear en forma canónica igual que en el § 44 de mi libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, son válidas las suposiciones expuestas con letra cursiva y por eso, según la hipótesis de inducción, este sistema de $n - 1$ ecuaciones se puede plantear en forma canónica. Esto se demuestra fácilmente expresando la matriz $||a_{ij}|| - \lambda E$ mediante la matriz correspondiente del sistema transformado, análogamente a (134*) del § 44 de mi libro "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias".

Entonces, existen unas constantes C_s no todas iguales a cero, tales que

$$\sum_s C_s k_{si}(x^0, y^0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9,7}$$

Multiplicando la igualdad i – ésima por a_{ij} y sumando respecto a i, obtendremos

$$0 = \sum_{i,s} C_s k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0\ y^0) =$$

$$= \sum_s C_s \sum_i k_{si}(x^0, y^0) a_{ij}(x^0, y^0) =$$

$$= \sum_s C_s \lambda_s (x^0, y^0) k_{sj}(x^0, y^0)$$

Hicimos el último paso utilizando la relación

$$\lambda_s\, k_{sj} = \sum k_{si} a_{ij},$$

que es análoga a (6,7).

De ese modo hemos obtenido igualdades análogas a (9,7) donde en lugar de C_s figura $C_s\ \lambda_s\ (x^0,\ y^0)$. Análogamente obtendremos

$$\sum_s C_s \lambda_s^m (x^0,\ y^0) k_{si}(x^0, y^0) = 0 \text{ para } m = 2, 3, \ldots, n-1.$$

El determinante formado con los coeficientes correspondientes a $C_s k_{si}\ (x^0,\ y^0)$ en estas igualdades (que es igual al determinante de Vandermonde) es distinto de cero para distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; por eso, obtenemos de aquí, que para todas las s e i

$$C_s k_{si}(x^0, y^0) = 0,$$

pero esto es imposible.

Observaciones. 1. Es fácil ver que todos los razonamientos anteriores se pueden repetir para el caso en que los coeficientes a_{ij} y f_i sean funciones complejas. En lo que sigue, sin embargo, supondremos que las a_{ij}, f_i son funciones reales.

2. Si la ecuación (7,7) tiene solamente raíces reales y distintas en toda la región considerada G, de los razonamientos anteriores se desprende que en la vecindad del punto A a cada raíz λ_i corresponde una solución única, salvo el signo, $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{in}$ del sistema (6,7) tal que en esta vecindad $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^2 = 1$ y las funciones k_{ij} tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{is} (véase la llamada en la pág. 97). Basándonos en esto, podemos probar que para las condiciones señaladas existe en toda la región G (si esta región es simplemente conexa) una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas que reduce el sistema (1,7) a la forma canónica (2,7). Los coeficientes de esta transformación tienen el mismo número de derivadas continuas que los a_{ij} y el sistema (2,7) toma la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i^*(x, y, v_1, \ldots, v_n) \qquad (10,7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Si en toda la región considerada G en el plano (x, y) la ecuación (7,7) no tiene raíces reales λ, entonces el sistema (1,7) se llama *elíptico* en esa región.

Si en toda la región G existe una transformación lineal no degenerada de las funciones incógnitas u_i con coeficientes reales que tienen el mismo número de derivadas continuas que los $a_{ij}(x, y)$ y que reduce el sistema (1,7) a la forma (10,7), el sistema (1,7) se llama *hiperbólico* en la región G.

Si en toda la región G todas las raíces λ de la ecuación (7,7) son reales y distintas, el sistema (1,7) se llama *hiperbólico en sentido restringido.* De la observación anterior se desprende que un sistema hiperbólico en sentido restringido en una región simplemente conexa G, es hiperbólico en esta región.

Del mismo modo el sistema lineal general de ecuaciones en derivadas parciales respecto a dos variables independientes

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n_j - 1} A_{ij}^k(t, x) \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^k \, \partial x^{n_j - k}} + \ldots \qquad (11,7)$$

$$(i = 1, \ldots, N)$$

se llama *elíptico* en la región G si en toda esta región el determinante de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| - \left\| \sum_{k=0}^{n_j - 1} A_{ij}^k \lambda^k \right\|$$

no tiene raíces reales λ.

Si todas las raíces de este determinante son reales y distintas, el sistema (11,7) se llama ***hiperbólico en sentido restringido.***

Problema. Demuestre que si el sistema (11,7) es hiperbólico en sentido restringido en una región simplemente conexa, en esta región es hiperbólico el sistema de ecuaciones de primer orden construido a partir de las ecuaciones (11,7) del mismo modo que el sistema (5,2) fue construido a partir de la ecuación (3,2).

4. Si todas las raíces de la ecuación (7,7) son reales, el sistema transformado (2,7) se puede hacer también real; para esto hay que escoger la transformación lineal que permite pasar de las funciones u_i a las funciones v_i con coeficientes reales; en el caso considerado esto siempre es posible.

Si la ecuación (7,7) tiene raíces complejas, estas raíces se descomponen en pares de raíces complejas conjugadas. Entonces, el sistema (2,7) se puede construir de manera que a cada ecuación de este sistema del tipo

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \lambda_k \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

corresponde una ecuación compleja conjugada, es decir, la ecuación

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i(x, y, v_1, \ldots, v_n),$$

donde

$$v_i = \bar{v}_k;\ \lambda_i = \bar{\lambda}_k;\ f_i(x, y, v_1, \ldots, v_n) = \overline{f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)}.$$

Separando en estas ecuaciones las partes real e imaginaria y poniendo

$$v_k = w_k^* + iw_k^{**},$$
$$\lambda_k = a_k + ib_k,$$
$$f_k = f_k^* + if_k^{**}$$

obtendremos

$$\frac{\partial w_k^*}{\partial x} = a_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} - b_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^*,$$
$$\frac{\partial w_k^*}{\partial x} = b_k \frac{\partial w_k^*}{\partial y} + a_k \frac{\partial w_k^{**}}{\partial y} + f_k^{**}.$$

El sistema de este tipo más sencillo es el conocido sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{\partial w_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}.$$

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v_{k-1}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial y} + f_k(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

se descomponen análogamente en parte real e imaginaria. De ese modo se demuestra que el sistema (1,7) puede ser reducido por una transformación lineal no degenerada (¿por qué?) con coeficientes reales suaves, a una forma canónica nueva, donde todas las ecuaciones son necesariamente reales, a diferencia de las ecuaciones (2,7). (Véase la observación al § 47 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", Gostiejizdat, 1952).

5. Consideremos un sistema casilineal hiperbólico (en el sentido restringido) de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y, u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial u_j}{\partial y} + f_i(x, y, u_1, \ldots, u_n) \qquad (12,7)$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Para ese sistema las cantidades λ y k_i que figuran en las ecuaciones (6,7) y (7,7) dependen no sólo de x, y sino también de $u_1, \ldots, u_n$; supongamos que en cierta región de definición de las variables x, y, $u_1, \ldots, u_n$ todas las raíces de la ecuación (7,7) son reales y distintas.

Supongamos que $k_{j1}, \ldots, k_{jn}$ es una solución no trivial del sistema (6,7) para $\lambda = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Multiplicando la i-ésima ecuación de (12,7) por k_{ji} y sumando por todas las i, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = \widetilde{f}_j(x, y, u_1, \ldots, u_n) \; (j = 1, \ldots, n). \qquad (13,7)$$

En cada una de las ecuaciones del sistema (13,7) figuran las derivadas de todas las funciones incógnitas en una misma dirección.

Cuando $n = 2$ el sistema (13,7) puede ser reducido a una forma análoga a la (10,7). Designemos por $\mu_j(x, y, u_1, u_2)$ la solución parcial de la ecuación

$$\frac{\partial(k_{j1}\mu_j)}{\partial u_2} = \frac{\partial(k_{j2}\mu_j)}{\partial u_1} \quad (j = 1, 2) \tag{14,7}$$

e introduzcamos en lugar de las funciones u_j unas funciones incógnitas nuevas $v_j(x, y, u_1, u_2)$ tales que

$$\frac{\partial v_j}{\partial u_i} = \mu_j k_{ji} \quad (i, j = 1, 2). \tag{15,7}$$

Las relaciones (15,7) no son contradictorias ya que las μ_j satisfacen las ecuaciones (14,7). Multiplicando la ecuación j - ésima del sistema (13,7) por μ_j $(j = 1, 2)$, llegamos al siguiente sistema canónico de ecuaciones para v_1, v_2:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial y} + f_j^*(x, y, v_1, v_2) \quad (j = 1, 2). \tag{16,7}$$

Las funciones v_j se llaman con frecuencia invariantes generalizados de Riemann.

Para $n > 2$ la reducción del sistema (12,7) a la forma (16,7), en general, no es posible.

Capítulo 2

ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Sección I

PROBLEMA DE CAUCHY EN LA CLASE DE FUNCIONES NO ANALÍTICAS

§ 8. PLANTEAMIENTO CORRECTO DEL PROBLEMA DE CAUCHY

El teorema de Kovalevskaya afirma la existencia de una solución analítica del problema de Cauchy para ecuaciones analíticas con condiciones iniciales analíticas. Muchos problemas de física se reducen al problema de Cauchy para ecuaciones analíticas con condiciones iniciales que tienen un número determinado de derivadas, pero que no son analíticas. A primera vista parece natural el siguiente método de resolución de este problema. Las funciones iniciales dadas y sus derivadas, las aproximamos por polinomios. Según el teorema de Weierstrass, esos polinomios se pueden escoger de manera tal que en toda la parte considerada del plano $t = t_0$, donde se plantean las condiciones de Cauchy, la diferencia entre estos polinomios y las funciones respectivas sea tan pequeña como se quiera. Según el teorema de Kovalevskaya, el problema de Cauchy para ecuaciones analíticas se puede resolver, si sustituimos las condiciones iniciales anteriores por otras que las aproximan. Parecería natural afirmar que esta solución del problema de Cauchy con las condiciones iniciales dadas por estos polinomios, difiere poco de la solución del mismo problema con las condiciones iniciales anteriores, al menos en una vecindad de la parte del plano $t = t_0$ en que están dadas las condiciones de Cauchy. Pero Hadamard construyó un ejemplo que muestra que a veces ocurre totalmente de otro modo.

Consideremos el siguiente problema de Cauchy. Necesitamos hallar la solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1,8}$$

que satisface para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x) = 0, \tag{2,8$_1$}$$

$$u_t(0, x) = \frac{1}{n^k} \operatorname{sen} nx, \tag{2,8$_2$}$$

donde n y k son constantes positivas. Es fácil comprobar que

$$u(t, x) = \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} nt \operatorname{sen} nx. \tag{3,8}$$

es una solución de este problema.

Como

$$|u'_t(0, x)| \leqslant \frac{1}{n^k},$$

para un n suficientemente grande, el valor absoluto de $u'_t(0, x)$ será en todo punto tan pequeño como se quiera. Sin embargo, la solución $u(t, x)$ del problema de Cauchy, como lo muestra la fórmula (3,8), tomará valores tan grandes como se quiera para un t arbitrariamente pequeño, siempre que n sea suficientemente grande. La situación no varía si además de exigir que $|u'_t(0, x)|$ sea pequeño, exigimos que lo sean todas las derivadas de $u'_t(0, x)$ respecto a x hasta el orden $k - 1$; aquí k es un entero positivo cualquiera mayor que 1. No hablamos de los valores iniciales de la propia función u, ya que éstos, según la condición $(2,8)_1$ son iguales a cero.

Supongamos que hemos hallado la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,8) y para ciertas condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x),$$
$$u'_t(0, x) = \varphi_1(x).$$

Sea la función $u_0(t, x)$ esta solución. Entonces para las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x); \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) + \frac{1}{n^k} \operatorname{sen} nx$$

la función

$$u_0(t, x) + \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} nt \operatorname{sen} nx$$

es la solución del problema de Cauchy. Por lo tanto, una variación muy pequeña de las funciones iniciales y de sus derivadas hasta el orden $k - 1$, obtenida agregando las funciones $(2,8)_1$ y $(2,8)_2$ a las condiciones iniciales anteriores, puede implicar variaciones tan grandes como se quiera de la solución del problema de Cauchy en un entorno tan pequeño como se quiera del valor inicial $t = 0$.

Diremos que el problema de Cauchy en una región cerrada $\overline{G}$ del espacio $t, x_1, \ldots, x_n$, adherida a la región G_0 en el hiperplano

$t = t_0$, donde están definidas las condiciones de Cauchy, para el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_n} A_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (4,8)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \quad k_0 + k_1 + \ldots + k_n = k \leqslant n_j, \quad k_0 < n_j$$

está correctamente planteado si existen unos números positivos L_1 y L_2 tales que

1. *en la región* $\overline{G}$ *existe una solución única del sistema* (4,8) que satisface para $t = t_0$ las condiciones

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 0, 1, \ldots, n_i - 1), \quad (5,8)$$

cualesquiera que sean las funciones $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definidas en *la región* G_0, *donde tanto estas funciones como sus derivadas* hasta el orden L_1 son continuas.

2. para cualquier ε positivo, se puede señalar un $\eta > 0$ tal que en toda la región $\overline{G}$ la solución del problema de Cauchy varía en menos de ε, si en la región G_0 las funciones $\varphi_i^{(k)}$ y todas sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden L_2 varían en menos de η.

Generalmente las condiciones de Cauchy se determinan experimentalmente y por eso no pueden hallarse con exactitud absoluta. En virtud de esto, para la física (entenderemos la palabra "física" en su sentido más amplio) presentan interés las soluciones del problema de Cauchy sólo para aquellas ecuaciones para las cuales el problema está correctamente planteado. Como lo muestra el ejemplo de Hadamard el problema de Cauchy no está correctamente planteado, en general, para una ecuación cualquiera.[20]

Lo que hemos venido diciendo en relación con el problema de Cauchy se puede extender también a los demás problemas de contorno, ya que para las ciencias naturales presentan interés sólo aquellos problemas en los cuales la solución depende continuamente, en cierto sentido, de las condiciones de contorno, de la corrección del planteamiento del problema. [21] Para cada tipo de ecuaciones existen sus problemas de contorno correctamente planteados.

---

[20] Es interesante observar que, si se consideran las soluciones del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en la clase de funciones de valor absoluto acotado por una constante dada de antemano, a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales corresponden pequeñas variaciones de la solución: véase, por ejemplo, M. M. Lavrientiev, Actas de la A C 106 (1956), Nº 3, p. 389 – 390.

[21] En cada caso concreto el concepto de problema correctamente planteado debe ser definido con exactitud.

Al definir el problema de Cauchy correctamente planteado para ecuaciones no lineales, es natural considerar como funciones iniciales posibles $\varphi_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ sólo las funciones próximas a ciertas funciones determinadas $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$. Puede resultar que cerca de un sistema de funciones $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ el problema de Cauchy esté correctamente planteado, y que cerca de otro sistema de funciones $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_n)$ esté incorrectamente planteado.

Casi en todos los casos considerados hasta ahora, los enunciados de esos problemas se han basado en consideraciones de tipo físico. En particular, los problemas citados en el § 1 están correctamente planteados.

En el presente capítulo se demuestra que el problema de Cauchy está correctamente planteado para la ecuación de ondas en el espacio, siempre que el plano en que se establecen las condiciones iniciales esté convenientemente inclinado, y para los sistemas hiperbólicos lineales de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden respecto a dos variables independientes. De acuerdo con lo que se afirma en el problema planteado en la observación 3) del § 7, el problema de Cauchy está correctamente planteado para sistemas lineales hiperbólicos en sentido restringido de la forma (11,7) en derivadas parciales respecto a dos variables independientes en una región unicoxena.

§ 9. CONCEPTO DE SOLUCIONES GENERALIZADAS

En el epígrafe anterior hemos tratado el planteamiento del problema de Cauchy en el caso de condiciones iniciales con un número suficiente de derivadas continuas. Sin embargo, los problemas físicos están lejos de reducirse siempre a condiciones iniciales que tengan un número de derivadas continuas suficiente para poder afirmar la existencia de la solución del problema correspondiente. Pero si las condiciones iniciales no son continuas ni tienen un número suficiente de derivadas continuas, puede ocurrir que tampoco exista una solución derivable del problema de contorno correspondiente. En este caso, resulta muy conveniente aplicar las así llamadas "soluciones generalizadas" de las ecuaciones diferenciales.

La teoría de las soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales fue desarrollada por S. L. Soboliev en los años 30. Estas soluciones se definen o bien como el límite de una sucesión de soluciones ordinarias o bien mediante identidades integrales.

Consideremos como ejemplo el problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1,9}$$

con la condición inicial

$$u(0, x) = \varphi(x), \tag{2,9}$$

donde $\varphi(x)$ es una función continuamente derivable en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. No es difícil comprobar que la solución de este problema en la región $D\{a < x + t < b\}$ viene dada por la función

$$u(t, x) = \varphi(x + t). \tag{3,9}$$

Supongamos ahora que en el segmento $[a, b]$ la función $\varphi(x)$ es continua pero no es derivable. Sabemos que esta función se puede representar como el límite de una sucesión uniformemente convergente en $[a, b]$ de funciones $\varphi^{(k)}(x)$, que tienen derivadas continuas. Además las soluciones correspondientes $\varphi^{(k)}(x + t)$ de la ecuación (1,9) convergen uniformemente en D hacia la función (3,9). Entonces la función (3,9) se puede considerar como solución de la ecuación (1,9) en sentido generalizado.

Definición 1. Un sistema de funciones $(u_1, \ldots, u_N)$ se llama solución generalizada de un sistema de ecuaciones diferenciales en una región G, si existe una sucesión infinita de soluciones $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ de este sistema que converge uniformemente a $(u_1, \ldots, u_N)$, es decir, si

$$\sup_{P \in G} \sum_{i=1}^{N} |u_i(P) - u_i^{(k)}(P)| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Observación. A veces un sistema de funciones $(u_1, \ldots, \ldots, u_N)$ también se llama solución generalizada de un sistema de ecuaciones diferenciales en el caso en que una sucesión de soluciones ordinarias $(u_1^{(k)}, \ldots, u_N^{(k)})$ converge a $(u_1, \ldots, u_N)$ de manera que

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} [u_i(P) - u_i^{(k)}(P)]^2 \, dP \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Las soluciones generalizadas así definidas pueden ser incluso discontinuas. [Véase S. L. Soboliev, Ecuaciones de la física matemática, Gostiejizdat, 1954 (especialmente las páginas 314, 322, 329) y S. L. Soboliev, Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L. 1950].

La extensión de la clase de las soluciones de uno u otro problema de contorno presenta interés sólo en el caso en que se conserve la unicidad de la solución. Para los problemas de contorno más típicos de ecuaciones en derivadas parciales, S. L. Soboliev demostró la existencia y unicidad de sus soluciones generalizadas. Aquí debemos definir especialmente cómo hay que comprender las condiciones de contorno para las soluciones generalizadas.

Para las ecuaciones lineales homogéneas elípticas y parabólicas cuyos coeficientes tienen un número suficiente de derivadas continuas, al introducir del modo señalado más arriba las soluciones generalizadas, no se amplía la clase de las soluciones ordinarias (véase el teorema 4 del § 30). No obstante, para las ecuaciones hiperbólicas esta extensión es esencial, como lo muestra el ejemplo considerado más arriba.

Es conveniente introducir las soluciones generalizadas ya que para la existencia de soluciones ordinarias de los problemas de contorno más importantes, es necesario imponer a las funciones definidas sobre el contorno de la región considerada, condiciones muy rígidas respecto al número de derivadas continuas, mientras que para la existencia de soluciones generalizadas no es necesario exigir ese número de derivadas continuas de las funciones definidas sobre el contorno. Así, por ejemplo, la solución generalizada del problema de Cauchy (1,9), (2,9) existe, como lo hemos visto, para cualquier función continua $\varphi(x)$.

Una razón más para considerar las soluciones generalizadas de la ecuación (1,9) es que generalmente la propia función $\varphi(x)$ puede conocerse sólo aproximadamente. Por eso la función correspondiente $u(t, x)$, definida por la fórmula (3,9), es también solamente una aproximación de la solución exacta del problema planteado. Nos es indiferente si esta aproximación es una solución ordinaria o sólo generalizada de la ecuación (1,9). Lo importante es que difiere poco de la solución real, si la función $\varphi(x)$ difiere uniformemente poco del valor inicial real $u(0, x)$.

Otro modo de introducir las soluciones generalizadas, que también pertenece a S. L. Soboliev, consiste en utilizar identidades integrales, que para las soluciones ordinarias son consecuencias de las ecuaciones consideradas. Este modo de introducir las soluciones generalizadas, que está muy difundido actualmente, lo consideraremos en un ejemplo de una ecuación lineal de primer orden.

Sea $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función derivable en la región D y que satisface la ecuación

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + b(x_1, \ldots, x_n)\, u = f(x_1, \ldots, x_n), \quad (4,9)$$

donde las a_i tienen derivadas continuas mientras que b y f son continuas en D. Multipliquemos ambos miembros de (4,9) por la función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, que tiene derivadas continuas en la región D y se anula en la vecindad de su contorno; integremos la igualdad obtenida por la región D. Integrando por partes llegamos a la relación

$$\iint_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{5,9}$$

donde

$$M(\sigma) \equiv -\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial(a_i\sigma)}{\partial x_i} + b\sigma.$$

Por lo tanto, toda solución ordinaria de (4,9) satisface la igualdad (5,9). Pero esta igualdad se verifica también para una clase más amplia de funciones $u(x_1, \ldots, x_n)$, ya que el miembro izquierdo de (5,9) no contiene derivadas de u. Por eso es obvia la siguiente definición.

Definición 2. Una función $u(x_1, \ldots, x_n)$ se llama solución generalizada de la ecuación (4,9) en una región D, si se verifica la igualdad (5,9) para toda función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ con derivadas continuas y que se anula en todos los puntos de la región D, cuyas distancias hasta la frontera de D son menores que un número positivo ρ_σ (ρ_σ es distinto para diferentes σ).

Al considerar las soluciones generalizadas de los problemas de contorno es necesario señalar en qué sentido se entienden las condiciones de contorno. A veces estas condiciones (o una parte de éstas) se pueden tomar en cuenta cambiando la forma de la identidad integral que define la solución generalizada. Por ejemplo, se llama solución generalizada del problema de Cauchy para la ecuación (4,9) en una región D del semiespacio $x_1 \geqslant 0$, cuya frontera Γ contiene la parte Γ_1 del hiperplano $x_1 = 0$, para la condición inicial

$$u(0, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, \ldots, x_n) \text{ sobre } \Gamma_1, \qquad (6,9)$$

a toda función continua a trozos $u(x_1, \ldots, x_n)$ que satisface la igualdad

$$\iint_D [uM(\sigma) - f\sigma]\, dx_1 \ldots dx_n -$$

$$- \int_{\Gamma_1} \varphi(x_2, \ldots, x_n)\, \sigma(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = 0 \quad (7,9)$$

para cualquier función $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ con derivadas continuas que se anula en una vecindad de $\Gamma - \Gamma_1$.

Problema 1. Demuestre que si la función $u(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas continuas en una región cerrada $\overline{D}$ y es solución generalizada del problema de Cauchy (4,9), (6,9) en el sentido de la relación (7,9), satisface la ecuación (4,9) y la condición inicial (6,9) en el sentido ordinario.

Problema 2. Construya una solución generalizada (en el sentido de la relación (7,9)) del problema de Cauchy para la ecuación (1,9) con la condición inicial

$$u(0, x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Problema 3. Demuestre que si la función $u(t, x)$ es una solución generalizada de la ecuación (4,9) en el sentido de la definición 1, es también solución generalizada de (4,9) en el sentido de la definición 2.

§ 10. PROBLEMA DE CAUCHY PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

1. Consideremos el sistema

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j + b_i(t, x) \qquad (1,10)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).^{22}$$

Supondremos que en toda la región considerada el sistema es hiperbólico, es decir, que todas las λ_i son funciones reales de t, x. Supondremos además que todas las $\lambda_i(t, x)$ son diferentes y están numeradas en orden creciente. [23]

---

[22] Todos los razonamientos que siguen en el epígrafe presente se pueden aplicar, modificándolos levemente, a los sistemas de la forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t, x, u_1, \ldots, u_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

si suponemos que las funciones $f_i(t, x, u_1, \ldots, u_N)$ tienen derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive (véase la demostración de la existencia de solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

por el método de las aproximaciones sucesivas).

[23] La suposición de que todas las λ_i son distintas no es esencial. Todos los razonamientos que siguen son aplicables también al caso en que algunas λ_i sean iguales entre sí. Sólo que al determinar la región $\overline{G}$ es necesario

Por cada punto de nuestra región pasan N características reales L_i con pendiente $k_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}$ respecto al eje x (véase el ejemplo 5 del § 3).

Si no se supone que los coeficientes del sistema (1,10) son analíticos, no se puede aplicar el teorema de Kovalevskaya para

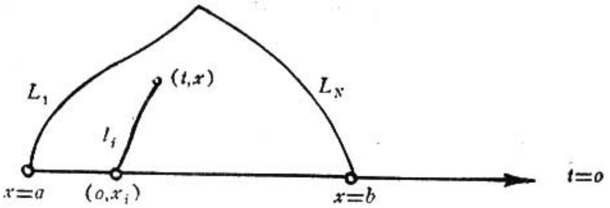

Fig. 2

demostrar la existencia de la solución del problema de Cauchy para este sistema. Supondremos que en una región cerrada $\overline{G}$, limitada por el segmento $[a, b]$ del eje Ox y por las características L_1 y L_N, que salen de los puntos $(0, a)$ y $(0, b)$ respectivamente

---

tomar, en lugar de la característica L_1 que sale del punto $(0, a)$, la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_{\min}(t, x)$$

que pasa por el punto $(0, a)$, donde $\lambda_{\min}(t, x) = \min\{\lambda_1(t, x), ..., \lambda_N(t, x)\}$, y en lugar de L_N, la solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_{\max}(t, x),$$

que pasa por el punto $(0, b)$, donde $\lambda_{\max}(t, x) = \max\{\lambda_1(t, x), \ldots, \lambda_N(t, x)\}$. Las funciones $\lambda_{\min}(t, x)$ y $\lambda_{\max}(t, x)$ son continuas y, como es fácil demostrar, satisfacen la condición de Lipshitz respecto a t, si todas las λ_i son continuas y tienen derivadas acotadas respecto a t.

(fig. 2)[24], las funciones a_{ij}, b_i y λ_i son continuas y tienen primeras derivadas continuas. Definiremos sobre el segmento $[a, b]$ N funciones $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ con derivadas continuas y plantearemos para el sistema (1,10) el problema de Cauchy del siguiente modo:

Hallar una solución $u_1, u_2, \ldots, u_N$ del sistema (1,10) *que sea continua en $\overline{G}$, que tenga en G primeras derivadas continuas y tal que para $t = 0$*

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2,10}$$

Para las suposiciones hechas, el problema planteado tiene solución única.

Demostración. Consideremos la ecuación i-ésima del sistema (1,10). Su miembro izquierdo difiere en un factor de la derivada de la función $u_i(t, x)$ a lo largo de la curva L_i. En efecto, si designamos por α_i el ángulo entre la tangente a la curva L_i en el punto (t, x) y el eje Ox, tendremos

$$\operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{1}{\lambda_i}.$$

Por lo tanto,

$$\cos \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}; \qquad \operatorname{sen} \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}},$$

---

[24] Las líneas L_1 y L_N no se intersectan necesariamente. Por lo tanto, la región G puede ser infinita. Para lo sucesivo es esencial que la región G sea acotada. Esto siempre se puede lograr limitando G, en caso de necesidad, por la recta $t = T$.

Todos los razonamientos subsiguientes serían asimismo aplicables, si la región G estuviera situada en el semiplano $t < 0$.

y
$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}}.$$

Aquí hemos designado por s_i la longitud del arco de la característica L_i; $\dfrac{\partial}{\partial s_i}$ denota la derivación en la dirección de la característica L_i.

El sistema (1,10) se puede escribir en la forma

$$\sqrt{1 + \lambda_i^2}\, \frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \quad (3,10)$$

Si designamos por du_i al diferencial de la función u_i sobre la curva L_i, obtendremos de (3,10)

$$\underset{i}{du_i} = (\Sigma\, a_{ij} u_j + b_i) \frac{ds_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}}$$

y como que $ds_i = \sqrt{1 + \lambda_i^2}\, dt$, encontramos

$$\underset{i}{du_i} = (\Sigma\, a_{ij} u_j + b_i)\, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \quad (4,10)$$

Fijemos ahora un punto arbitrario (t, x) de la región $\overline{G}$ y designemos mediante l_i la parte de la curva L_i comprendida entre el punto (t, x) y la intersección de la curva en un punto $(0, x_i)$ con el segmento $[a, b]$ del eje $t = 0$ (véase fig. 2). Después de esto integremos la i-ésima relación de la fórmula (4,10) según el arco l_i, desde el punto $(0, x_i)$ hasta el punto (t, x). Obtendremos el sistema de ecuaciones integrales

$$u_i(t, x) - u_i(0, x_i) = \int_{l_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j + b_i\right)dt$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

o, en virtud de las condiciones iniciales (2,10),

$$u_i(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j + b_i\right)dt. \qquad (5,10)$$

Es evidente que toda solución del sistema (1,10) que satisfaga las condiciones iniciales (2,10) es una solución del sistema (5,10). Viceversa, si tenemos una solución del sistema de ecuaciones integrales (5,10) y si las funciones que forman esta solución tienen en G derivadas continuas respecto a t y a x, entonces, realizando las operaciones inversas a aquellas mediante las cuales hemos pasado de (1,10) a (5,10), nos convenceremos que la solución del sistema (5,10) es también la solución del problema planteado de Cauchy. El problema se redujo de ese modo a la demostración de la existencia de una solución con derivadas continuas del sistema (5,10).

Construyamos las aproximaciones sucesivas de la solución del sistema (5,10) del siguiente modo: hagamos

$$u_i^{(0)}(t, x) = \varphi_i(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N),$$

$$u_i^{(1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i}[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x)u_j^{(0)} + b_i(t, x)]dt$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

y en general,

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i(x_i) + \int_{l_i} [\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t, x) u_j^{(n)} + b_i(t, x)] dt$$

$$(i = 1, \ldots, N).$$

Hablando con rigor, la última igualdad se debe escribir así:

$$u_i^{(n+1)}(t, x) = \varphi_i[x_i(0, t, x)] +$$

$$+ \int_0^t [\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x)) u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x)) +$$

$$+ b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))] d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Suponemos que $x = x_i\ (t, t^0, x^0)$ es la ecuación de la característica L_i, que pasa por el punto $(t^0,\ x^0)$. Si demostramos la convergencia uniforme de la sucesión $u_i^{(n)}\ (t, x)$ en la región cerrada $\overline{G}$, entonces el sistema de funciones límites $u_i\ (t, x)$ satisfará las ecuaciones (5,10). La convergencia uniforme de la sucesión $u_i^{(n)}\ (t, x)$ es equivalente a la convergencia uniforme de la serie

$$u_i^{(0)}(t, x) + \sum_{n=0}^{\infty} [u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x)]. \qquad (6{,}10)$$

Para demostrar la convergencia uniforme de esta serie construyamos para ésta una mayorante numérica. Como las funciones $u_i^{(0)}\ (t, x)$ y $u_i^{(1)}\ (t, x)$ son continuas en la región cerrada $\overline{G}$, están acotadas en esta región.

Hagamos

$$M = \max \{ |u_1^{(0)}|, \ldots, |u_N^{(0)}|, |u_1^{(1)}|, \ldots, |u_N^{(1)}| \}$$

en la región $\overline{G}$. Entonces

$$| u_i^{(0)}(t, x) | \leqslant M,$$
$$| u_i^{(1)} - u_i^{(0)} | \leqslant 2M,$$
$$(t, x) \in \overline{G}.$$

Designemos max $|a_{ij}|$ en la región $\overline{G}$ para todas las $i, j, = 1, \ldots,$ $\ldots, N,$ mediante A. Entonces

$$| u_i^{(2)}(t, x) - u_i^{(1)}(t, x) | \leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \cdot$$

$$\cdot \, | u_j^{(1)} - u_j^{(0)} | \, dt \leqslant 2MANt,$$

$$| u_i^{(3)}(t, x) - u_i^{(2)}(t, x) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \cdot | u_j^{(2)} - u_j^{(1)} | \, dt \leqslant 2MA^2N^2 \frac{t^2}{2}.$$

Supongamos ahora que

$$| u_i^{(n)}(t, x) - u_i^{(n-1)}(t, x) | \leqslant 2M \frac{A^{n-1}N^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Entonces

$$| u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x) | \leqslant$$

$$\leqslant \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} | a_{ij} | \cdot | u_j^{(n)} - u_j^{(n-1)} | \, dt \leqslant 2M \frac{A^nN^nt^n}{n!}$$

Por eso, de acuerdo con el método de inducción matemática, para cualquier n se tiene

$$| u_i^{(n+1)}(t, x) - u_i^{(n)}(t, x) | \leqslant 2\, M \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Pero la región G está acotada y tomando un número fijo T mayor que todos los valores de t en esta región, obtendremos que en toda la región G

$$| u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)} | \leqslant 2\, M \frac{(ANT)^n}{n!}.$$

Como la serie numérica $\sum \frac{(ANT)^n}{n!}$ converge, la serie (6,10) converge uniformemente en toda la región cerrada $\overline{G}$, lo cual demuestra la existencia y la continuidad de la solución del sistema (5,10).

Demostremos ahora la unicidad de la solución continua en $\overline{G}$ (y por lo tanto acotada) del sistema (5,10). Supongamos que tenemos dos soluciones del sistema (5,10) $u_1, \ldots, u_N$ y $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_N$. Sustituyendo ambas soluciones en el sistema y restando una de otra las ecuaciones correspondientes obtendremos

$$u_i(t, x) - \widetilde{u}_i(t, x) = \int_{l_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(u_j - \widetilde{u}_j)\, dt.$$

Supongamos ahora que

$$\max_{\substack{(t,x) \in \overline{G} \\ i = 1, \ldots, N}} | u_i - \widetilde{u}_i | = M > 0.$$

Entonces, haciendo estimados sucesivos de la diferencia $|u_i(t, x) - \tilde{u}_i(t, x)|$, como hicimos en la demostración de la existencia, obtendremos que

$$M \leqslant M \frac{(ANT)^n}{n!}$$

para cualquier n, lo que lleva a una contradicción si n es suficientemente grande. Por lo tanto $M = 0$ y

$$u_i(t, x) = \tilde{u}_i(t, x) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

es decir, la solución es única.

Para finalizar la demostración debemos comprobar que las funciones halladas $u_i(t, x)$ tienen derivadas continuas de primer orden con respecto a t y x. Es evidente que para esto es suficiente demostrar que las funciones $u_i(t, x)$ tienen primeras derivadas continuas en la dirección l_i y respecto a x en cada punto, ya que de esto y del hecho de que las l_i tienen derivadas continuas se desprende la continuidad de las derivadas respecto a t y x en toda la región G.

La existencia y continuidad de las derivadas de $u_i(t, x)$ a lo largo de l_i se desprende directamente del sistema (5,10) y de la continuidad de la solución obtenida. Para demostrar la existencia y la continuidad de las derivadas $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, observemos primeramente que de la supuesta existencia de las derivadas continuas de $\varphi_i(x)$, $\lambda_i(t, x)$, $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$, se deduce que todas las aproximaciones construidas en la demostración de la existencia de solución tienen derivadas continuas respecto a x. Derivemos respecto a x la igualdad que determina la $(n + 1)$-ésima aproximación.

Obtendremos

$$\frac{\partial u_i^{(n+1)}(t, x)}{\partial x} = \varphi_i'[x_i(0, t, x)] \frac{\partial x_i(0, t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \int_0 \Big[\sum_j \frac{\partial a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x} u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x)) +$$

$$+ \sum_j a_{ij}(\tau, x_i(\tau, t, x)) \frac{\partial u_j^{(n)}(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(\tau, t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial b_i(\tau, x_i(\tau, t, x))}{\partial x} \Big] d\tau$$ [25]

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

En virtud de las suposiciones hechas respecto al sistema (1,10), se puede demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de la misma forma que se demostró la convergencia de $u_i^{(n)}$, cambiando únicamente las constantes en las estimaciones realizadas. Por eso $\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial u_i}{\partial x}$ y la función es continua que es lo que se quería demostrar.

---

[25] La coordenada x_i del punto de intersección de l_i con la recta $t = \tau$ es una función continuamente derivable de t y x, en virtud de la supuesta continuidad de las derivadas de λ_i. Los límites de integración respecto a t en la integral curvilínea no varían al variar x.

Si las funciones $\varphi_i(x)$ fuesen sólo continuas y no tuviesen derivadas, las construcciones descritas al principio del presente epígrafe darían sólo las soluciones generalizadas del sistema (1,10) (véase el siguiente subepígrafe).

2. Hemos demostrado la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para el sistema (1,10) en la clase de funciones que tienen derivadas continuas de primer orden. Para demostrar que el problema está correctamente planteado vamos a hacer la demostración del siguiente teorema (véase § 8).

Si las funciones iniciales $\varphi_i(x)$ del problema de Cauchy son sustituidas por unas funciones $\psi_i(x)$ que difieren de las respectivas $\varphi_i(x)$ en menos de η, entonces las funciones $v_i(t, x)$ que determinan la solución del problema transformado de Cauchy diferirán de las respectivas $u_i(t, x)$ en menos de ε, donde $\varepsilon \to 0$ si $\eta \to 0$.

Supongamos

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) - \psi_i(x) &= \eta_i(x), \\ u_i(t, x) - v_i(t, x) &= z_i(t, x). \end{aligned} \tag{7,10}$$

Las funciones $z_i(t, x)$ satisfacen las ecuaciones integrales

$$z_i(t, x) = \eta_i(x_i) + \int_{l_i} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \right) dt. \tag{8,10}$$

Supongamos

$$\max_{\substack{(t, x) \in \overline{U} \\ i = 1, \ldots, N}} | z_i(t, x) | = \varepsilon.$$

Entonces, repitiendo la estimación hecha en la demostración de la existencia de la solución, obtenemos

$$| z_i(t, x) | \leqslant \eta + A\varepsilon N t. \tag{9,10}$$

Utilizando la desigualdad (9,10) y haciendo de nuevo la estimación $|z_i(t, x)|$, mediante la ecuación (8,10) obtenemos

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta\ (1 + ANt) + \varepsilon\, \frac{A^2N^2t^2}{2!}.$$

Repitiendo esta operación n veces demostramos la desigualdad

$$|z_i(t, x)| \leqslant \eta \left(1 + ANt + \ldots + \frac{(ANt)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \varepsilon\, \frac{(ANt)^n}{n!}.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\varepsilon \leqslant \eta e^{ANT}.$$

De aquí es evidente que $\varepsilon \to 0$, si $\eta \to 0$, ya que e^{ANT} es una constante que no depende de η.

Problema 1. Enuncie la definición de solución generalizada del problema de Cauchy para el sistema (1,10) bajo las condiciones (2,10) y mediante una identidad integral, análogamente a como se hizo en el § 9 para la ecuación (4,9).

Problema 2. Demuestre la unicidad de la solución generalizada del problema de Cauchy (1,10), (2,10) en la clase de funciones que son continuas y tienen derivadas continuas fuera de un número finito de lineas suaves.

Problema 3. Supongamos que la solución generalizada del problema de Cauchy (1,10), (2,10) tiene discontinuidad de primer orden en un número finito de líneas suaves y que fuera de estas líneas la solución tiene derivadas continuas. Demuestre que estas líneas son las características del sistema (1,10).

3. Para finalizar el presente epígrafe daremos una descripción breve del método de las diferencias finitas que es útil a la

hora de buscar la solución aproximada del problema de Cauchy planteado en el subepígrafe 1.

Sean $\varphi_i(x)$ las funciones iniciales definidas sobre el segmento $[a, b]$ del eje Ox. Para hallar aproximadamente los valores de las funciones $u_i(t, x)$ que satisfagan el sistema (1,10) y que para $t = 0$ tomen los valores dados $\varphi_i(x)$, procederemos del siguiente modo.

Fijemos un número entero n y dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes iguales de longitud $h = \frac{b-a}{n}$. Seguidamente tracemos las rectas $x = a + ph$ y las rectas $t = qh$ para ciertos valores enteros p y q tales que la región G, en la cual se busca la solución del problema de Cauchy (véase el 1), esté cubierta por una red cuadrada de lado igual a h. Denotemos los vértices del cuadrado con dos subíndices, es decir, designemos por M_{pq} el punto de intersección de las rectas $x = a + ph$ y $t = qh$. Los valores de las funciones incógnitas $u_i(t, x)$ en todos los puntos $M_{p0}: u_i(0, a + ph) = \varphi_i(a + ph) = \varphi_i(M_{p0})$ están dados. Describamos el proceso mediante el cual se pueden hallar aproximadamente los valores de $u_i(t, x)$ en todos los vértices de la red contenidos en G. En cada uno de los puntos M_{p0} están definidos los coeficientes del sistema (1,10) y en particular los N números $\lambda_i(M_{p0}) = \lambda_i^{p0} (i = 1, \ldots, N)$. A partir de cada punto M_{p0} tracemos N segmentos de recta con coeficientes angulares $k_i^{p0} = -\frac{1}{\lambda_i^{p0}}$ hasta la intersección con la recta $t = h$ y hallemos los valores de $u_i(t, x)$ en los extremos de los segmentos correspondientes. Para esto usamos la forma (4,10) del sistema (1,10) y sustituimos el diferencial a lo largo de la característica L_i por el incremento, y la igualdad exacta correspondiente por una aproximada. Obtendremos la relación

$$\underset{i}{\Delta u_i} \approx (\sum a_{ij}u_j + b_i)\, h,$$

que permite hallar el incremento de la función $\underset{i}{\Delta} u_i$ al pasar del punto M_{p0} a lo largo de la característica L_i (más exactamente a lo largo de la tangente a esta característica) a la recta $t = h$.

Añadiendo los incrementos hallados a los valores iniciales de la función en los puntos M_{p0}, encontraremos los valores de cada función u_i en los puntos de la recta $t = h$. Los valores de las distintas funciones quedarán determinados, en general, en distintos puntos. Mediante cualquier proceso de interpolación, a partir de los valores hallados para u_i sobre la recta $t = h$, calculamos sus valores en los puntos M_{pi}, es decir, en los vértices de la red situados sobre esta recta. Después de esto, podemos continuar el cálculo de los valores de $u_i(t, x)$ mediante el mismo método y encontrar estos valores en los puntos de la recta $t = 2h$ que pertenecen a la región G. Repitiendo la interpolación y la determinación de los valores de $u_i(t, x)$ tantas veces como sea necesario, hallaremos los valores aproximados de todas las funciones $u_i(t, x)$ en todos los vértices de los cuadrados situados en la región G.

Se puede demostrar que cuando $n \to \infty$ los valores aproximados de las funciones convergen uniformemente a un límite que da la solución exacta del problema de Cauchy y, por lo tanto, para un n suficientemente grande, las aproximaciones halladas por el método descrito van a diferir tan poco como se quiera de la solución real.

Si $N = 2$, el proceso del cálculo aproximado de la solución del problema de Cauchy se simplifica considerablemente. Se tienen solamente dos familias de características. Dividiendo el segmento $[a, b]$ del eje Ox, en el cual están dados los valores iniciales de u_1 y u_2, en pequeños intervalos y trazando en los puntos de división las tangentes a las características de las distintas familias hasta que se intersecten en el punto más cercano al segmento $[a, b]$, hallamos aproximadamente los valores u_1 y u_2, en estos puntos de intersección, según fue descrito más arriba. Trazando en estos nuevos puntos las tangentes a las características, calculamos aproximadamente los valores de u_1 y u_2 en los puntos de intersección de estas nuevas tangentes que se encuentran lo más cerca posible del segmento $[a, b]$, y así sucesivamente. De ese modo obtendremos los valores de u_1 y u_2, para un conjunto suficientemente denso de puntos, si la división inicial del segmento $[a, b]$ es suficientemente pequeña. Este caso no exige ninguna red cuadrada ni interpolación.

§ 11. PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS. TEOREMA DE LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

Supongamos que la función $u(t, x_1, x_2)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1,11}$$

dentro de un cono circular K de eje paralelo al eje Ot y con vértice en el punto A y cuyas generatrices forman con el eje Ot un ángulo $\alpha = 45°$. Supongamos además que la propia función $u(t, x_1, x_2)$ y todas sus derivadas hasta el segundo orden inclusive son continuas dentro y en la frontera de K.

Entonces el valor de $u(t, x_1, x_2)$ en un punto A se determina unívocamente por los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en la base del cono situada en el plano $t = t_0$.

El cono K se llama *característico.* Es fácil ver que la superficie lateral de K es la superficie característica en el sentido expuesto en el 2 del § 3.

El teorema es válido lo mismo cuando el punto A tiene la coordenada $t > t_0$ que cuando $t < t_0$.

Observaciones. 1. En lugar de la ecuación (1,11) en el enunciado del teorema se pudo haber tomado la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right), \tag{2,11}$$

donde $a > 0$ es una constante cualquiera, si sustituimos el cono cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con Ot por otro cono cuyas generatrices están inclinadas respecto al eje Ot un ángulo $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$. En efecto, la ecuación (2,11) se reduce a la ecuación (1,11) al sustituir at por t.

2. Siempre podemos considerar que $t_0 = 0$. El caso de cualquier t_0 se reduce a éste si introducimos en lugar de la variable independiente t, una nueva variable independiente $t^* = t - t_0$, con lo cual la forma de la ecuación (1,11) no varía.

3. Supongamos que en el plano $t_0 = 0$ está definida la región G_0. Construyamos conos K con bases situadas en la región G_0, con ejes paralelos al eje Ot y con generatrices que forman con Ot un ángulo de $\pm$ 45°. Entonces de nuestro teorema se deduce que

dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en la región G_0, la solución de la ecuación (1,11) queda determinada unívocamente en la región G del espacio $(t, x_1\ x_2)$ comprendida entre los conos K. Por ejemplo, dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en el cuadrado $|x_1| < a$, $|x_2| < a$, la solución $u(t, x_1, x_2)$, de la ecuación (1,11), cuyas dos primeras derivadas son continuas, queda unívocamente determinada dentro de cada una de las dos pirámides para las cuales este cuadrado es base común y cuyas aristas laterales forman un ángulo de 45° con la base.

4. Dados u y $\frac{\partial u}{\partial t}$ en un círculo G_0 cualquiera situado en el plano (x_1, x_2), la solución $u(t, x_1, x_2)$ de la ecuación (1,11) no queda determinada en ningún punto B situado fuera de los conos K correspondientes cuya base común es el círculo G_0, cuyos ejes son paralelos al eje Ot y cuyas generatrices forman con el eje Ot un ángulo de 45°. Para demostrar esto, es suficiente comprobar que existe una solución $\bar{u}(t, x_1, x_2)$ tal que $\bar{u}$ y $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ son iguales a cero en el círculo G_0 y $\bar{u}(B) \neq 0$. Para construir esta solución observemos que para cualquier función $f(z)$ con dos derivadas y para $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, la función

$$f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \tag{3,11}$$

es una solución de la ecuación (1,11). (¡Compruébese!)

La función (3,11) es constante en cualquier plano

$$t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = C, \tag{4,11}$$

que forme un ángulo de 45° con Ot. Escojamos α_1 y α_2 de tal manera que el plano de la familia (4,11) que pasa por el punto B no intersecte el círculo G_0. Después de esto, se puede escoger una función $f(z)$ con dos derivadas continuas de modo que $f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ sea distinta de cero en el punto B e igual a cero en G_0. Entonces $\widetilde{u}(t, x_1 x_2) = f(t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ es la solución que necesitamos.

5. La demostración que se hace más abajo del teorema de la unicidad es aplicable para las soluciones, cuyas dos primeras derivadas son continuas, de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

para cualquier n. En este caso el cono tridimensional K del enunciado del teorema habría que sustituirlo por un cono en el espacio de $n + 1$ dimensiones, de eje paralelo al eje Ot y cuyas generatrices forman un ángulo de 45° con Ot. Este cono también se llama característico. Para $n = 1$, se convierte en un triángulo cuya base es paralela al eje Ox y cuyos lados forman con el mismo un ángulo de 45°.

Demostración del teorema de la unicidad. Supongamos que dentro del cono K y sobre su superficie existen dos soluciones $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ de la ecuación (1,11), continuas al igual que sus dos primeras derivadas y que en la base de K, como sus primeras derivadas respecto a t, son iguales entre sí. Entonces la diferencia

$$u(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2) - u_1(t, x_1, x_2)$$

debe también satisfacer la ecuación homogénea (1,11) dentro de K, pero en la base del cono $u(t, x_1 x_2)$ y $u_t(t, x_1 x_2)$ deben anularse. El teorema de la unicidad quedará demostrado si demostramos que $u(t, x_1, x_2) = 0$ en el vértice de K. Para demostrar esto integremos por dentro del cono K la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right),$$

por donde la misma es igual a cero en todo punto ya que la función u satisface la ecuación (1,11). Como que

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

entonces

$$0 = \iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dt\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \iiint\limits_K \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right\} dt\, dx_1\, dx_2.$$

Transformemos esta integral en una integral doble mediante la fórmula de Ostrogradski. Si designamos por K_1 la superficie lateral del cono K y por C su base, como en C, en virtud de las condiciones iniciales, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, queda solamente la integral

$$0 = \frac{1}{2} \iint\limits_{K_1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] \cos (n, t) - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos (n, x_1) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos (n, x_2) \right\} d\sigma. \text{[26]} \tag{5,11}$$

Pero en la superficie lateral del cono característico

$$\cos^2(n, t) - \cos^2(n, x_1) - \cos^2(n, x_2) = 0. \tag{6,11}$$

Multiplicando y dividiendo la función subintegral por cos (n, t) y utilizando la relación (6,11) obtendremos a partir de (5,11)

$$\frac{1}{2 \cos(n, t)} \iint\limits_{K_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(n, t) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos(n, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(n, t) \right)^2 \right\} d\sigma = 0. \tag{7,11}$$

[26] Fijemos la atención en que durante las transformaciones realizadas con la integral

$$\iiint\limits_K \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx_1 \, dx_2 \, dt$$

hemos asumido la continuidad de las primeras derivadas de u dentro y en la frontera de K y la integrabilidad en K de las segundas derivadas de u. Estas últimas se pueden integrar en K si son, por ejemplo, continuas dentro de K y en su frontera.

Aquí cos (n, t) se coloca fuera del signo de integral porque en K_1 es constante: (cos $(n, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ para $t > t_0$ y cos $(n, t) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ para $t < t_0$).

De la igualdad (7,11) se deduce que en la superficie lateral del cono K

$$\frac{u'_t}{\cos(n, t)} = \frac{u'_{x_1}}{\cos(n, x_1)} = \frac{u'_{x_2}}{\cos(n, x_2)} = v. \qquad (8,11)$$

Si designamos por m la dirección de una generatriz cualquiera del cono K, valiéndonos de las igualdades (8,11) obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial m} = u'_t \cos(m, t) + u'_{x_1} \cos(m, x_1) + u'_{x_2} \cos(m, x_2) =$$

$$= v\,[\cos(n, t)\cos(m, t) + \cos(n, x_1)\cos(m, x_1) +$$

$$+ \cos(n, x_2)\cos(m, x_2)] = v\cos(m, n) = 0$$

(cos $(m, n) = 0$ porque la genetratriz del cono siempre forma un ángulo recto con la normal a su superficie).

De ese modo en la superficie del cono K la derivada de u en la dirección de la generatriz es igual a cero. De aquí se desprende que la función u es igual a cero en el vértice del cono ya que la misma es igual a cero en su base. Con esto queda terminada la demostración del teorema de la unicidad.

§ 12. FÓRMULAS QUE DAN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS

1. Supongamos que en una región G_0 del espacio (x_1, x_2, x_3) están dadas las funciones $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ y $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ siendo φ_0 continua al igual que sus derivadas hasta el tercer orden y φ_1 hasta el segundo orden inclusive. Queremos hallar una solución $u(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \tag{1,12}$$

que satisfaga para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_0(x_1, x_2, x_3), \qquad (2{,}12)_1$$

$$u'_t(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_1, x_2, x_3). \qquad (2{,}12)_2$$

Esta solución estará definida en todos los puntos (t, x_1, x_2, x_3) que sirven de vértices a los conos característicos cuyas bases pertenecen a G_0.

Hallemos primero la solución $u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación (1,12) para las condiciones iniciales de tipo particular:

$$u_\varphi(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (3{,}12)_1$$

$$u'_{\varphi t}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \qquad (3{,}12)_2$$

Es fácil comprobar que la función

$$v(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$$

satisface para $t = 0$ las condiciones

$$v(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

$$v'_t(0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Por eso si u_φ tiene derivadas continuas de tercer orden, la solución de la ecuación (1,12) que satisface ambas condiciones (2,12) viene dada por la fórmula

$$u = \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial t} + u_{\varphi 1}. \tag{4,12}$$

De ese modo el problema general de Cauchy para la ecuación (1,12) se reduce a hallar u_φ. Y podemos afirmar que se cumple la fórmula

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma_t. \tag{5,12}$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Kirchhoff*. Aquí $S_t(x_1, x_2, x_3)$ designa una esfera de radio t con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) sobre el hiperplano $t = 0$ donde está dada la función φ, y $d\sigma_t$ es un elemento de superficie de esta esfera. Supondremos que la función $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ es continua y acotada al igual que sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive ($k \geqslant 2$); entonces la función u_φ, como se verá más adelante a partir de la fórmula (6,12), también tendrá derivadas continuas hasta el k-ésimo orden inclusive.

Demostremos primeramente que la función u_φ definida por la fórmula (5,12) satisface las condiciones iniciales (3,12). La primera de estas condiciones se satisface ya que

$$\left| \iint\limits_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma_t \right| \leqslant \max|\varphi| \cdot \frac{4\pi t^2}{t},$$

y, por lo tanto,

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) \to 0 \text{ cuando } t \to 0.$$

Para comprobar la segunda condición observemos que haciendo

$$\alpha_k = x_k + \beta_k t,$$

reducimos la integral (5,12) a la forma

$$u_\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1, \tag{6,12}$$

donde la integración se lleva a cabo por una misma esfera S_1 para todos los x_1, x_2, x_3, t:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad d\sigma_1 = \frac{d\sigma_t}{t^2}.$$

Por eso

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1 +$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \sum_{k=1}^{3} \beta_k \varphi_k(x_1 + t\beta_1, x_2 + t\beta_2, x_3 + t\beta_3)\, d\sigma_1. \tag{7,12}$$

Aquí φ_k designa la derivada de φ respecto a α_k. Es fácil ver que el primer sumando en el miembro derecho tiende a $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ cuando $t \to 0$ y que el segundo tiende a cero ya que la integral que figura en el mismo permanece acotada.

Ahora es suficiente demostrar que la función u_φ definida por la fórmula de Kirchhoff satisface la ecuación (1,12). De la igualdad (6,12) encontramos

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2} = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\sigma_t . \tag{8,12}$$

Para calcular $\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}$ volvamos a escribir la igualdad (7,12) así:

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{S_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} d\alpha_2 \, d\alpha_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 \, d\alpha_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \right) =$$

$$= \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi t} \iiint\limits_{V_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 =$$

$$= \frac{u_\varphi}{t} + \frac{I(t)}{4\pi t}, \tag{9,12}$$

donde

$$I(t) = \iiint\limits_{V_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 ,$$

y V_t es una esfera de radio t con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) sobre el hiperplano $t = 0$.

De la fórmula (9,12) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{u_\varphi}{t^2} + \frac{1}{t}\left[\frac{u_\varphi}{t} + \frac{I(t)}{4\pi t}\right] - \frac{I(t)}{4\pi t^2} + \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(t)}{\partial t}. \qquad (10,12)$$

Pero es fácil ver que

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \iint_{S_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_3^2} \right) d\sigma_t.\text{[27]} \qquad (11,12)$$

Comparando las igualdades (8,12), (10,12) y (11,12), es fácil comprobar que la función u definida por la fórmula de Kirchhoff satisface efectivamente la ecuación de ondas (1,12).

Observación. Si la función $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ es continua y $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$ es continua al igual que sus primeras derivadas, la función u definida por las igualdades (4,12) y (5,12) da solamente una solución generalizada del problema de Cauchy. Aquí entendemos como solución generalizada del problema de Cauchy

[27] En efecto, pasando a coordenadas polares $(\varrho, \vartheta, \psi)$ con centro en el punto (x_1, x_2, x_3) tenemos

$$I(t) = \int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Delta\varphi(r, \psi, \vartheta)\, r^2 \operatorname{sen}\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr,$$

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \Delta\varphi(t, \varphi, \vartheta)\, t^2 \operatorname{sen}\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \iint_{S_t} \Delta\varphi\, d\sigma_t.$$

para la ecuación (1,12) con las condiciones iniciales (2,12), el límite de la sucesión uniformemente convergente de las soluciones $u_{(n)}(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación (1,12) con las condiciones iniciales

$$u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_{0(n)}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{(n)}(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi_{1(n)}(x_1, x_2, x_3),$$

si cuando $n \to \infty$ las sucesiones $\varphi_{0(n)}$, $\dfrac{\partial \varphi_{0(n)}}{\partial x_i}$, $\varphi_{1(n)}$ convergen uniformemente en G_0 a φ_0, $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}$, φ_1 respectivamente. Es fácil ver que si $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ es continua y φ_0 es derivable continuamente, la solución generalizada del problema de Cauchy con las condiciones iniciales (2,12) existe y es única.

2. Consideremos el caso particular cuando la función φ no depende de x_3. Es fácil comprobar que la función u dada por la fórmula de Kirchhoff tampoco depende de x_3 y por eso satisfará la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}. \tag{12,12}$$

En este caso es posible sustituir la integral referida a la esfera S_t por una integral doble según la sección K_t de la esfera V_t por el plano $\alpha_3 = x_3$. Proyectando el elemento $d\sigma_t$ de la superficie sobre este plano obtenemos

$$d\sigma_t = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

y la fórmula de Kirchhoff se puede escribir del siguiente modo:
$u_\varphi(t, x_1, x_2) =$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{t} \, d\sigma_t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_t} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}.$$

Por eso la solución de la ecuación (12,12) que satisface las condiciones

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2),$$
$$u'_t(0, x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2),$$

se da por la fórmula

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{K_t} \frac{\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{K_t} \frac{\varphi_0(\alpha_1, \alpha_2) \, d\alpha_1 \, d\alpha_2}{\sqrt{t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}. \quad (13,12)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de Poisson.*

3. Si la función φ no depende ni de x_2 ni de x_3, la función u dada por la fórmula de Kirchhoff tampoco depende ni de x_2 ni de x_3 y por eso satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}. \quad (14,12)$$

En este caso la fórmula de Kirchhoff se puede escribir así:

$$u_\varphi(t, x_1) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_t} \frac{\varphi(\alpha_1)}{t}\, d\sigma_t = \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(\alpha_1)d\alpha_1.$$

Aquí nos hemos basado en que el área de la parte de la esfera S_t contenida entre los planos $\alpha_1 =$ const. y $\alpha_1 + d\alpha_1 =$ const. que intersectan la esfera es igual a $2\pi t\, d\alpha_1$[28] y que la función $\varphi(\alpha_1)$ en toda esta parte de la esfera conserva un valor constante con exactitud del orden de $d\alpha_1$.

Por eso la solución de la ecuación (14,12) que satisface las condiciones

$$u(0, x_1) = \varphi_0(x_1), \quad u'_t(0, x_1) = \varphi_1(x_1),$$

está dada por la fórmula

$$u(t, x_1) = \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_0(\alpha_1)\, d\alpha_1 =$$

$$= \frac{\varphi_0(x_1+t) + \varphi_0(x_1-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi_1(\alpha_1)\, d\alpha_1. \qquad (15,12)$$

Esta fórmula se llama *fórmula de D'Alembert.*

[28] El área de una franja esférica de pequeña altura $d\alpha$ es aproximadamente igual a $2\pi\varrho\, dl$, donde ϱ es el radio de la sección media de la franja y dl es la generatriz del cono truncado inscrito en esta franja. Pero $\frac{t}{\varrho} = \frac{d}{d\alpha}$, de donde $\varrho\, dl = t\, d\alpha$ y $d\sigma_t = 2\pi t\, d\alpha$.

Recordemos que de acuerdo con el teorema de la unicidad, demostrado en el § 11, el problema de Cauchy no tiene otras soluciones que las dadas para las ecuaciones (1,12), (12,12) y (14,12) mediante las fórmulas (4,12), (13,12), (15,12), respectivamente. El método mediante el cual obtuvimos la solución del problema de Cauchy para las ecuaciones (12,12) y (14,12), a partir de la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,12) se llama *método de descenso.*

Hemos encontrado la solución del problema de Cauchy para $t > 0$. El caso $t < 0$ se reduce al anterior sustituyendo t por $-t$, lo cual no altera las ecuaciones (1,12), (12,12), (14,12).

Problema 1. Sea $\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)$ la solución de la ecuación (1,12) que para $t = \tau$ satisface las condiciones

$$\bar{u}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\tau, x_1, x_2, x_3; \tau) = f(\tau, x_1, x_2, x_3).$$

Demostrar que la solución $u(t, x_1, x_2, x_3)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(\tau, x_1, x_2, x_3),$$

que satisface para $t = 0$ las condiciones

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

está dada por la fórmula

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \int_0^t \bar{u}(t, x_1, x_2, x_3; \tau)\, d\tau. \tag{16,12}$$

Problema 2. Utilizando la fórmula (5,12) demuestre que la solución (16,12) es de la forma

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leqslant t} \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t-r)}{r} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, d\alpha_3 \quad (17,12)$$

donde $r = \sqrt{(x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 + (x_3 - \alpha_3)^2}$. La integral (17,12) se llama *potencial retardado*.

§ 13. ESTUDIO DE LAS FÓRMULAS QUE DAN LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY

1. Dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales. Todas las fórmulas deducidas por nosotros en el epígrafe anterior y que dan la solución del problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (1,13)$$

contienen, cuando $n = 2, 3$, integrales de las funciones iniciales multiplicadas por determinadas funciones y derivadas respecto al tiempo de esas integrales. Para $n = 1$ estas fórmulas contienen sólo integrales de las funciones iniciales y las propias funciones iniciales.

Por eso, si hacemos variar las funciones iniciales φ_0 y φ_1 de manera que tanto las citadas funciones como sus primeras derivadas varíen suficientemente poco, la función $u(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que da la solución del problema de Cauchy variará también poco. Si $n = 1$, para que lo anterior se cumpla es suficiente que varíen poco las propias funciones φ_0 y φ_1. Aquí se supone, por supuesto, que se consideran solamente valores acotados de t, si la región en la cual se dan las funciones iniciales es infinita.

De ese modo queda establecido que *el problema de Cauchy para las ecuaciones* (1,12), (12,12), (14,12) *está correctamente planteado.*

Se pueden deducir las fórmulas que dan la solución del problema de Cauchy para la ecuación (1,13) siendo n cualquiera, análogas a las fórmulas (4,12), (13,12), (15,12), y comprobar que también para esta ecuación el problema de Cauchy queda correctamente planteado, si damos las condiciones iniciales para $t = 0$.[20] Los números L_1 y L_2 que figuran en la definición del problema correctamente planteado (véase § 8) son iguales respectivamente a $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ y $\left[\frac{n}{2}\right]$; aquí $[x]$ denota la parte entera de x.

De las fórmulas (4,12) y (13,12) se deduce que para t pequeños, $|u(t, x_1, x_2, x_3)|$ y respectivamente $|u(t, x_1, x_2)|$ puede ser muy grande a pesar de que sean pequeñas φ_0 y φ_1, si las derivadas de la función φ_0 son grandes. Puede formarse "crestas" de la onda.

2. *Difusión de ondas*

Las fórmulas (4,12) y (5,12) muestran que el valor en el punto $(t, x_1, \ldots, x_n)$ de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas (1,13), siendo $n = 3$, depende de los datos iniciales sólo en el contorno de la base del cono característico con vértice en el punto (t, x_1, x_2, x_3). Si $n = 1$ o $n = 2$, $u(t, x_1 \ldots, x_n)$

[20] Estas fórmulas se pueden, por ejemplo, deducir por el método expuesto en el "Curso de matemática superior" de V. I. Smirnov, tomo 2, § 173, Fizmatguiz, 1958.

depende de los datos iniciales en toda la base del cono, como lo muestran las fórmulas (13,12) y (15,12).

Supongamos que los valores iniciales de u y u'_t para $t = 0$ difieren de cero sólo dentro de una pequeña región G_ε, cerca de cierto punto $(0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Analicemos los valores que toma u en los puntos $(t, x_1, \ldots, x_n)$ para $x_1, \ldots, x_n$ fijos, y para crecientes valores de t a partir de cero. Para $n = 3$, $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ puede diferir de cero sólo en una parte pequeña de la recta, considerada en el espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$ y paralela al eje Ot; precisamente en la parte donde están situados los vértices de los conos característicos de la ecuación (1,12), las fronteras de cuyas bases intersectan la región G_ε. Si $n = 1$ o $n = 2$ y el punto $(0, x_1)$, respectivamente, $(0, x_1, x_2)$, no pertenece a G_ε, entonces $u(t, x_1)$ y respectivamente $u(t, x_1, x_2)$ es igual a cero para t suficientemente pequeños, y será, en general, diferente de cero a partir de los valores de t para los cuales el segmento $|x_1 - \alpha_1| \leqslant t$, respectivamente, el círculo $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2) \leqslant t^2$, intersecta la región G_ε.

Por lo tanto, la perturbación ocurrida en el instante inicial en cierto entorno pequeño del punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, para $n = 3$ y $t > 0$, se hace sentir en los valores de la función sólo en los puntos del espacio $(x_1, \ldots, x_n)$ que están situados *cerca* de la esfera de radio t con centro en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. De ese modo la perturbación ocurrida en el instante inicial en el punto (x_1^0, x_2^0, x_3^0) origina una onda esférica con centro en este punto que tiene un frente delantero y uno trasero. En cambio, si $n = 1$ o $n = 2$, la perturbación ocurrida en el instante inicial en la vecindad del punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ se hace sentir en general, *en todos los puntos situados dentro de la esfera* de radio t con centro en $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Y surge una onda que tiene su frontera delantera nítida y la trasera difusa. En este caso se dice que ocurre la difusión de la onda. Para $n = 3$ no hay difusión. Se puede demostrar que no hay difusión de las ondas para las soluciones de la ecuación (1,13) si $n \geqslant 3$ es impar.

Las perturbaciones ocurridas en una pequeña región G_ε de un cuerpo tridimensional sólido elástico, o de un gas, producen ondas que no dejan detrás de sí ninguna "huella", si se supone que sus vibraciones obdecen la ecuación (1,12); en el caso de un gas, $u(t, x_1, x_2, x_3)$ denota, por ejemplo, la desviación de la presión gaseosa respecto a la presión normal, en el punto (x_1, x_2, x_3) y el instante t. En cambio, las perturbaciones en un continuo bidimensional, por ejemplo, una membrana tensa o la superficie del agua, en una pequeña región G_ε, producen ondas que teóricamente dejan siempre detrás de sí "huellas", si se supone que las vibraciones obedecen la ecuación (12,12). En la práctica estas vibraciones se amortiguan rápidamente debido a la fricción, que no se toma en cuenta al deducir la ecuación (12,12). Del mismo modo, en general, queda huella al pasar una onda por un continuo unidimensional (véase el 3 del presente epígrafe).

3. *Estudio de la fórmula de D'Alembert*

Consideremos dos casos especiales que ilustran claramente el comportamiento de la solución de la ecuación (14,12) en el caso general.

Primero consideremos el caso cuando $\varphi_1(x) \equiv 0$ y el gráfico de $\varphi_0(x)$ tiene la forma señalada en la parte superior de la figura 3 (línea gruesa). En lugar de x_1, para abreviar, escribiremos x. Entonces la fórmula de D'Alembert toma la forma

$$u(t, x) = \frac{\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)}{2}.$$

Para obtener el gráfico de $u(t, x)$, considerada como función de x, para cualquier t positivo fijo es cómodo proceder del siguiente modo: dibujar dos gráficos iguales, cada uno de los cuales se obtiene del gráfico de $\varphi_0(x)$ reduciendo en la mitad sus ordenadas (línea de puntos en la parte superior de la figura 3). Después se se mueve uno de estos gráficos en una cantidad t hacia la derecha, en el sentido positivo del eje x, y el otro en t hacia la izquierda. Seguidamente se construye un nuevo gráfico en el cual la ordenada para cada valor de x es igual a la suma de las ordenadas correspondientes al valor de x en cuestión en los dos gráficos trasladados. De este modo han sido construidos en la figura los gráficos

$$u(0, x),\ u\left(\frac{1}{4}, x\right),$$

$$u\left(\frac{1}{2}, x\right),\ u(1, x)$$

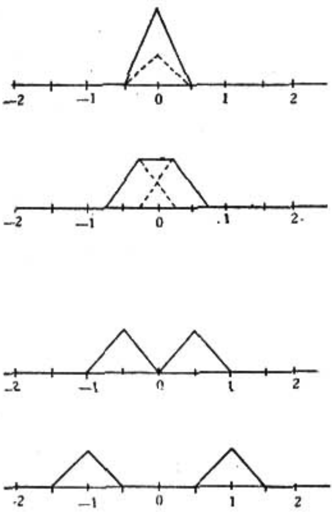

Fig. 3

(las líneas de puntos siempre denotan gráficos auxiliares y la línea gruesa continua los gráficos de $u(t, x)$ para un t fijo).

Consideremos ahora el caso cuando $\varphi_0(x) \equiv 0$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 \text{ para } |x| > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces la fórmula de D'Alembert toma la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha.$$

Para cada x fijo $u(t, x) = 0$, hasta que el intervalo $(x - t, x + t)$ no abarque el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, donde $\varphi_1(x) \neq 0$; $u(t, x)$ variará mientras el intervalo creciente $(x - t, x + t)$ vaya cubriendo más y más el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Después que el intervalo $(x - t, x + t)$ comprenda dentro de sí el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el valor de $u(t, x)$ permanecerá igual a

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(\alpha)\, d\alpha.$$

Para obtener el gráfico que representa la forma de la cuerda para distintos t, es preferible proceder del siguiente modo.

Denotemos por $\Phi(z)$ una cierta función primitiva para $\varphi_1(z)$. Entonces

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\Phi(x + t) - \Phi(x - t)].$$

Para obtener el gráfico de $u(t, x)$ tracemos los gráficos de las funciones $\frac{1}{2} \Phi(x)$ y $-\frac{1}{2} \Phi(x)$ y después traslademos cada uno de estos gráficos una distancia t a lo largo del eje Ox; el primero hacia la izquierda y el segundo hacia la derecha. Sumando las ordenadas de los gráficos trasladados obtendremos el gráfico de la función $u(t, x)$.

En la figura 4 se muestra la forma de la cuerda en los instantes $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

El fenómeno de la difusión se refleja aquí en que un punto x, cuando sale de su posición de equilibrio, no vuelve más a ésta.

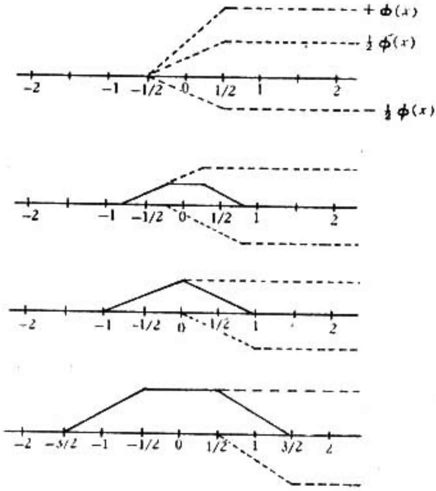

Fig. 4

Las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ consideradas en los ejemplos anteriores, o bien tienen discontinuidades las propias funciones $(\varphi_1(x))$ o bien las tienen sus derivadas $[\varphi_0(x)]$. Por eso les corresponden soluciones generalizadas de la ecuación (14,12). Para obtener una solución de esta ecuación generalmente dos veces continuamente derivable es suficiente hacer variar un poco los gráficos de las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ de manera que se obtengan gráficos de funciones con segunda derivada continua. Para la función φ_0 esto se puede hacer de manera que la ordenada de $\varphi_0(x)$ varíe poco en todas partes. Entonces la solución correspondiente de la ecuación (14,12) también variará poco. Al sustituir $\varphi_1(x)$ por una función suave, podemos proceder de manera que $\Phi(x)$ varíe tan poco como se quiera. Entonces $u(t, x)$ también variará poco en todas partes.

§ 14. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

1. En el § 1 hemos señalado que la expresión $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ es la única, con exactitud hasta un factor constante, combinación lineal de las segundas derivadas que no cambia de forma con la rotación del espacio, es decir, con una transformación ortogonal cualquiera de las coordenadas x_1, x_2, x_3. La ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1,14}$$

también está relacionada muy estrechamente con una cierta clase de transformaciones lineales de las variables (t, x_1, x_2, x_3) con coeficientes reales constantes, que no cambia la forma de esta ecuación. Estudiémosla con más detalle.

Se llama *transformación de Lorentz* de las variables x_0, x_1, x_2, x_3 a toda transformación lineal homogénea de estas variables con coeficientes reales de la forma

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij} x_j \ (i = 0, 1, 2, 3), \tag{2,14}$$

que no altera la forma cuadrática

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{3,14}$$

es decir, en las nuevas variables esta forma se escribe así:

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Es fácil comprobar que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz forma un grupo en el que la operación de grupo es la superposición de las transformaciones (sustitución). En particular, es fácil ver que la aplicación sucesiva de dos transformaciones de Lorentz es también una transformación de Lorentz.

Planteemos la fórmula para una clase especial de transformaciones de Lorentz. Consideremos la transformación que no altera dos de las tres últimas coordenadas (espaciales). Esa transformación tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= ax_0 + bx_1, \\ y_1 &= cx_0 + dx_1, \\ y_2 &= \qquad\qquad x_2, \\ y_3 &= \qquad\qquad\quad x_3. \end{aligned}\right\} \tag{4,14}$$

Para esta transformación debe cumplirse la identidad

$$y_0^2 - y_1^2 \equiv x_0^2 - x_1^2.$$

Sustituyendo y_0 e y_1 de las fórmulas (4,14), tenemos

$$(ax_0 + bx_1)^2 - (cx_0 + dx_1)^2 \equiv x_0^2 - x_1^2.$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 1, \\ b^2 - d^2 &= -1, \\ ab - cd &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5,14)$$

Estas ecuaciones se satisfacen si ponemos

$$a = d = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = c = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

donde $|\beta| < 1$.

Entonces obtenemos las fórmulas para una cierta clase de transformaciones de Lorentz

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{x_0 + \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y_1 &= \frac{\beta x_0 + x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6,14)$$

Las fórmulas (6,14) son muy importantes ya que demostraremos ahora que *toda transformación de Lorentz es una combinación de una transformación ortogonal de las variables x_1, x_2, x_3 que deja invariante x_0, de una transformación de la forma* (6,14) *y de un cambio de signo de cualquiera de las variables (reflexión).*

Supongamos que la transformación de Lorentz está dada por la fórmula.

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\ y_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (7{,}14)$$

Si al menos uno de los números a_{01}, a_{02}, a_{03} es distinto de cero, realizamos una transformación ortogonal de x_1, x_2, x_3 a x'_1, x'_2, x'_3 de manera que se cumpla la igualdad

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 = ax'_1.$$

Si, además, hacemos x'_0 igual a x_0, tendremos evidentemente que esta transformación de x_0, x_1, x_2, x_3 en x'_0, x'_1 x'_2, x'_3 es una transformación de Lorentz. Sustituyendo en el miembro derecho de (7,14) las variables x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 obtendremos

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00}x'_0 + ax'_1, \\ y_1 &= a_{10}x'_0 + b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3, \\ y_2 &= a_{20}x'_0 + b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3, \\ y_3 &= a_{30}x'_0 + b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8{,}14)$$

Demostremos que $a^2 < a_{00}^2$. En efecto, como que (8,14) es una transformación de Lorentz,

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2,$$

de donde

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 + y_0^2. \qquad (9{,}14)$$

Hagamos $y_0 = 0$. Entonces $x'_0 = -\frac{a}{a_{00}} x'_1$ y la identidad (9,14) se reduce a una identidad respecto a tres variables

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \left(1 - \frac{a^2}{a_{00}^2}\right) x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

El miembro derecho es positivo para x'_1, x'_2, x'_3 cualesquiera siempre que $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > 0$, ya que de $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ se deduce que $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por eso debe cumplirse

$$1 - \frac{a^2}{a_{00}^2} > 0,$$

es decir, $a^2 < a_{00}^2$.

Hagamos $\frac{a}{a_{00}} = \beta$ y realicemos la transformación de Lorentz del tipo (6,14)

$$\left.\begin{aligned} x''_0 &= \frac{x'_0 + \beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_1 &= \frac{\beta x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ x''_2 &= x'_2, \\ x''_3 &= x'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10,14)$$

Es evidente que y_0, y_1, y_2, y_3 están relacionadas con x''_0, x''_1, x''_2, x''_3 mediante una transformación de Lorentz de la forma

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= c x''_0, \\ y_1 &= c_{10} x''_0 + c_{11} x''_1 + c_{12} x''_2 + c_{13} x''_3, \\ y_2 &= c_{20} x''_0 + c_{21} x''_1 + c_{22} x''_2 + c_{23} x''_3, \\ y_3 &= c_{30} x''_0 + c_{31} x''_1 + c_{32} x''_2 + c_{33} x''_3, \end{aligned}\right\} \qquad (11,14)$$

donde, como es fácil calcular, $c = \pm \sqrt{a_{00}^2 - a^2}$.

Si $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$, el sistema (7,14) tiene ya la forma (11,14).

Hallemos los valores de los coeficientes c, c_{10}, c_{20}, c_{30}.

Haciendo $x''_0 = 1$, $x''_1 = x''_2 = x''_3 = 0$, obtendremos

$$y_0 = c, \quad y_1 = c_{10}, \quad y_2 = c_{20}, \quad y_3 = c_{30}.$$

De aquí $1 = c^2 - c^2_{10} - c^2_{20} - c^2_{30}$ y $c^2 \geqslant 1$.

Haciendo $y_0 = 1$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, hallamos que $x''_0 = \dfrac{1}{c}$ y x''_1, x''_2, x''_3 tienen ciertos valores determinados $\widetilde{x}''_1$, $\widetilde{x}''_2$, $\widetilde{x}''_3$. De aquí

$$1 = \frac{1}{c^2} - \widetilde{x}''^2_1 - \widetilde{x}''^2_2 - \widetilde{x}''^2_3 \text{ y } \frac{1}{c^2} \geqslant 1,$$

es decir, $c^2 \leqslant 1$.

Por lo tanto, $c^2 = 1$ y volviendo a la igualdad

$$1 = c^2 - c^2_{10} - c^2_{20} - c^2_{30},$$

vemos que $c_{10} = c_{20} = c_{30} = 0$. Por lo tanto, la transformación (11,14) tiene en realidad la forma

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \pm x''_0, \\ y_1 &= \qquad c_{11}x''_1 + c_{12}x''_2 + c_{13}x''_3, \\ y_2 &= \qquad c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2 + c_{23}x''_3, \\ y_3 &= \qquad c_{31}x''_1 + c_{32}x''_2 + c_{33}x''_3. \end{aligned}\right\} \qquad (12,14)$$

Cambiando, si es necesario, el signo de la coordenada x''_0 obtendremos una transformación de Lorentz que es simplemente una transformación ortogonal de las variables x''_1, x''_2, x''_3 a y_1, y_2, y_3.

Vemos de ese modo que la transformación de Lorentz más general (7,14) que transforma las variables x_i en y_i es el resultado de las siguientes transformaciones sucesivas: una ortogonal que transforma x_i en x'_i; una transformación de Lorentz de tipo especial (6,14) que transforma x'_i en x''_i; eventualmente un cambio de signo de x''_0 y, finalmente una transformación ortogonal de x''_i en y_i, $i = 1, 2, 3$.

Si trasponemos la matriz de cada una de estas transformaciones intermedias, obtendremos de nuevo la matriz de una transformación del mismo tipo. De aquí se desprende que *la traspuesta de una matriz de una transformación de Lorentz es una matriz de una transformación de Lorentz.* De la definición de transformación de Lorentz se deduce también que la transformación inversa a la de Lorentz es también de Lorentz.

2. Demostremos ahora el resultado fundamental que aclara la estrecha relación de las transformaciones de Lorentz con la ecuación de ondas.

Teorema. Toda transformación lineal no degenerada de las variables t, x_1, x_2, x_3 con coeficientes reales, que no altera la forma de la ecuación (1,14), *es la combinación de una transformación de Lorentz, de una traslación del origen de coordenadas en el espacio* (t, x_1, x_2, x_3) *y de una transformación de semejanza en este espacio.*

Para abreviar, hagamos $t = x_0$.

La frase "una transformación que no altera la forma de una ecuación" la entendemos del siguiente modo: cualquier función $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ (con segundas derivadas continuas) que satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0;$$

después de la transformación de x_i en y_i se transforma en la función $u(y_0, y_1, y_2, y_3)$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0. \qquad (13,14)$$

De aquí se deduce que cualquiera que sea la transformación de este tipo que se aplique a una función arbitraria $u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ se cumple la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} =$$
$$= k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right), \qquad (14,14)$$

donde $k \neq 0$ es una cierta constante. En efecto, en el caso general tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = \sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (15,14)$$

y si suponemos que

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \neq k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),$$

llegaremos a una contradicción con el hecho de que toda solución de la ecuación (1,14) se transforma al cambiar las variables en una solución de esa misma ecuación. En efecto, en este caso se puede escoger un sistema de números $u^0_{ik} = u^0_{ki}$ que verifiquen las dos ecuaciones lineales

$$\sum_{i,j=0}^{3} A_{ij} u^0_{ij} = 1, \qquad (16{,}14)_1$$

$$u^0_{00} - u^0_{11} - u^0_{22} - u^0_{33} = 0. \qquad (16{,}14)_2$$

Para la función $u(x_0, x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i,j=0}^{3} u^0_{ij}\, x_i x_j$ se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u^0_{ij}.$$

En virtud de (16,14), esta función satisface la ecuación (1,14) y, sin embargo, después de una transformación de las variables no satisface la ecuación (13,14) como se desprende de $(16{,}14)_1$ y (15,14). Por lo tanto se verifica (14,14).

Realicemos la transformación de semejanza

$$x'_i = x_i \frac{1}{\sqrt{|k|}} \quad (i = 0, 1, 2, 3);$$

entonces

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3'^2}\right).$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que la transformación

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}x'_j \qquad (i = 0, \ldots, 3), \tag{17,14}$$

que no varía el módulo de la expresión diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_0} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_3}, \tag{18,14}$$

es una transformación de Lorentz, es decir, no altera la forma cuadrática

$$x'^2_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3. \tag{19,14}$$

Pero esto se desprende del resultado demostrado en el § 5, según el cual para una transformación lineal de las variables independientes de la forma (17,14), la expresión

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_i \partial x'_j}$$

se transforma igual que la forma cuadrática de estas variables

$$\sum_{i,j=0}^{3} c_{ij}x'_i x'_j,$$

al aplicarle la transformación

$$x'_j = \sum_{i=0}^{3} a_{ij}y_i \qquad (j = 0, \ldots, 3). \tag{20,14}$$

Como que la transformación (17,14), con exactitud que incluye el signo, no cambia la forma de la expresión (18,14), la transformación (20,14), con la misma exactitud, no cambia lá forma cuadrática (19,14). Pero en virtud de la ley de inercia tampoco el signo de (19,14) varía para ninguna transformación lineal con coeficientes reales, y es por eso que la transformación (20,14) y su inversa son transformaciones de Lorentz. De acuerdo con lo establecido en el subepígrafe 1, la transformación inicial (17,14) es una transformación de Lorentz, ya que su matriz es traspuesta de la matriz de la transformación de Lorentz (20,14).

Por lo tanto, toda transformación lineal homogénea que no cambie la forma de la ecuación (1,14) es combinación lineal de una transformación de semejanza y una transformación de Lorentz. Por último, es evidente que un traslado del origen de coordenadas tampoco altera la forma de esta ecuación, es decir, el teorema queda demostrado completamente.

3. Mediante una transformación ortogonal de las variables x_1, x_2, x_3 podemos transformar cualquier hiperplano que pase por el origen de coordenadas en el espacio t, x_1, x_2, x_3 y que forme con Ot un ángulo mayor de 45° (y solamente hiperplanos de este tipo) en el hiperplano

$$t = \beta x_1, \text{ donde } |\beta| < 1,$$ [30]

[30] Supongamos que la ecuación de ese hiperplano está dada en la forma $At + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = 0$, donde $B^2 + C^2 + D^2 = 1$. Entonces el coseno del ángulo α_0 entre la normal al hiperplano y el eje Ot es igual a $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+1}}$ y la tangente de este ángulo es igual a $\dfrac{1}{A}$. Si la normal al hiper-

y una transformación de Lorentz (6,14) permite transformar ese hiperplano en el hiperplano coordenado $t^* = 0$. Por lo tanto, siempre podemos transformar cualquier hiperplano en el espacio (t, x_1, x_2, x_3) que forma con el eje Ot un ángulo mayor de 45° en el hiperplano $t = 0$ mediante una transformación lineal de las variables que no altere la forma de la ecuación (1,14). Esto permite resolver el problema de Cauchy para la ecuación (1,14), cuando las condiciones iniciales vienen dadas no en el hiperplano $t = 0$ sino en cualquier hiperplano Π que forme con el eje Ot un ángulo mayor de 45° o, lo que es lo mismo, en cualquier hiperplano Π que corte cada uno de los conos característicos de la ecuación (1,14) por una de sus hojas o solamente en el vértice. En efecto, al dar en una región cualquiera G_0 situada sobre Π una función u y su derivada en cualquier dirección que parta del plano Π, damos en la región G_0 las primeras derivadas de u en cualquier dirección del espacio (t, x_1, x_2, x_3), ya que conocer la función u en la región G_0 nos permite conocer en esta región sus primeras derivadas en todas las direcciones situadas en G_0. Pero transformando el hiperplano Π en el hiperplano $t^* = 0$, reducimos la solución del problema de Cauchy dadas las condiciones iniciales en Π al problema de Cauchy considerado en el § 12.

---

plano forma con el eje Ot un ángulo menor de 45°, entonces la transformación

$$Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = x'_1$$

para x'_2 y x'_3 escogidos convenientemente (a partir de las condiciones de ortogonalidad de la transformación) convierte el hiperplano dado en uno de la forma

$$At + x'_1 = 0\,; \quad t = -\frac{1}{A}\,x'_1\,, \text{ donde } \left|\frac{1}{A}\right| < 1.$$

Por otro lado, es fácil demostrar que el problema de Cauchy para la ecuación (1,14) no estará correctamente planteado si se dan las condiciones iniciales en un hiperplano Π que forme con el eje Ot, en el espacio $t, x_1 \ldots, x_n$, un ángulo que no exceda los 45°.

En efecto, si un hiperplano Π forma con Ot un ángulo de 45°, tiene dirección característica y por eso no se pueden dar, arbitrariamente, las condiciones de Cauchy, incluso exigiendo de las mismas un mayor grado de derivabilidad en Π.

Consideremos ahora el caso cuando Π forma con Ot un ángulo menor de 45°. Mediante una transformación ortogonal y una traslación paralela en el espacio (x_1, x_2, x_3), siempre se puede lograr que el hiperplano Π tenga la ecuación

$$\beta t' + x_1' = 0, \text{ donde } |\beta| < 1.$$

Además, con esta transformación no se altera la forma de la ecuación (1,14), como ya se ha señalado. Utilizando ahora la transformación de Lorentz se puede conseguir que al hiperplano Π corresponda la ecuación

$$x_1^* = 0,$$

sin alterar la ecuación (1,14).

Consideremos en el hiperplano $x_1^* = 0$ las siguientes condiciones de Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} u(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'^*_{x_1}(t^*, 0, x_2^*, x_3^*) &= \varphi_1(x_2^*). \end{aligned}\right\} \tag{21,14}$$

Si hallamos una solución $u(x_1^*, x_2^*)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^{*2}} = 0,$$

que satisfaga las condiciones

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_2^*) &= \varphi_0(x_2^*), \\ u'^*_{x_1}(0, x_2^*) &= \varphi_1(x_2^*), \end{aligned}\right\} \qquad (22,14)$$

la función $u(x_1^*, x_2^*)$ satisfará la ecuación (1,14) y las condiciones (21,14). Si tomamos en vez de las condiciones iniciales (22,14) las condiciones $(2,8)_1$, $(2,8)_2$, que fueron utilizadas en el ejemplo construido por Hadamard, se demuestra fácilmente que el problema de Cauchy para la ecuación (1,14) con las condiciones iniciales en el hiperplano $x_1 = 0$ no está correctamente planteado.

§ 15. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

El principio especial de la relatividad consiste en que en todos los sistemas inerciales de referencia[31] todas las leyes de la naturaleza tienen una misma forma. Más exactamente, en todos los sistemas de referencia, todas las leyes de la naturaleza pueden ser planteadas mediante las mismas ecuaciones. En particular, en todos los sistemas de referencia la velocidad de la luz es la

[31] Se llama sistema de referencia a las coordenadas espaciales que sirven para indicar el lugar y al reloj que sirve para indicar el tiempo.

misma y no depende de la dirección en que se propaga. Para abreviar las denotaciones, supondremos que es igual a 1.

Un sistema de referencia se llama inercial, si en este sistema todo cuerpo se mueve lineal y uniformemente siempre que no actúen sobre él fuerzas exteriores. De esta definición se deduce que un sistema de referencia que se mueva uniforme y linealmente respecto a un sistema de referencia inercial, también es inercial y, viceversa, dos sistemas inerciales cualesquiera se mueven el uno *respecto al otro lineal y uniformemente.*

Nuestro objetivo es encontrar la relación entre las coordenadas espacio-tiempo para dos sistemas inerciales de referencia A' y A'', cuando el sistema A'' se mueve uniforme y linealmente respecto al otro sistema de referencia A' con una velocidad β cuyo valor absoluto es menor que 1.

Puesto que el espacio y el tiempo se suponen homogéneos e isotrópicos, aceptaremos que la relación buscada es lineal y que sus coeficientes dependen sólo de β. Las coordenadas espacio-tiempo de A' las designaremos por (t', x'_1, x'_2, x'_3) y de A'' por $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$. A veces para abreviar escribiremos x'_0 en lugar de t' y x''_0 en lugar de t''.

Sea pues

$$x''_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j + \alpha_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{1,15}$$

La búsqueda de la relación entre las coordenadas (t, x'_1, x'_2, x'_3) y $(t'', x''_1, x''_2, x''_3)$ se basará exclusivamente en que la velocidad de la luz en los sistemas de referencia A' y A'' es constante.

La propagación rectilínea de una onda luminosa plana en el espacio (x'_1, x'_2, x'_3) la describimos mediante una función no constante

$$f(a_0 t' + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3), \tag{2,15}$$

cuyas superficies de nivel se desplazan perpendicularmente al plano $a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 =$ const. con velocidad

$$-\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

que según la suposición es igual a 1; a_0, a_1, a_2, a_3 son ciertas constantes. De aquí se desprende que

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{3,15}$$

Como la velocidad de la luz en el sistema de referencia A'' de coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 también debe ser igual a 1 encontramos, pasando de las coordenadas x'_i a las coordenadas x''_i, que la expresión $a_0 t' + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3$ se transforma en $a'_0 t'' + a'_1 x''_1 + a'_2 x''_2 + a'_3 x''_3 + b$ y

$$a'^2_0 = a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3. \tag{4,15}$$

Demostremos que las coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 se obtienen de t', x'_1, x'_2, x'_3 mediante una transformación de Lorentz y un traslado del origen de coordenadas. Mediante un traslado del origen podemos sustituir las coordenadas t'', x''_1, x''_2, x''_3 por las coordenadas t, x_1, x_2, x_3 que están relacionadas con t', x'_1, x'_2, x'_3 mediante las ecuaciones lineales homogéneas

$$x_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(\beta)\, x'_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{5,15}$$

Supongamos ahora que la función $f(a_0 x'_0 + a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3)$ se transforma en la función $f(a'_0 x_0 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3)$. Si los *números* a_0, a_1, a_2, a_3 satisfacen la relación $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, los a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 satisfacen la relación análoga $a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3 = 0$. Aquí (a_0, a_1, a_2, a_3) es un sistema *arbitrario* de números que satisface la ecuación (3,15) y a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 es el sistema correspondiente de números después de la transformación (5,15). Vamos a demostrar que de aquí se desprende que (5,15) da la transformación de Lorentz para los coeficientes a_i, es decir,

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3.$$

En efecto, si las variables a_i se transforman mediante la sustitución (5,15), en general se cumple la fórmula

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \equiv \sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta)\, a'_i\, a'_j . \tag{6,15}$$

Demostremos primero que

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta) a'_i\, a'_j \equiv k(\beta)\,(a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3). \tag{7,15}$$

En efecto, de

$$\sum_{i,j=0}^{3} k_{ij}(\beta) a'_i\, a'_j = 0 \tag{8,15}$$

debe desprenderse que

$$a'^2_0 - a'^2_1 - a'^2_2 - a'^2_3 = 0 \tag{9,15}$$

y viceversa, es decir, las superficies en el espacio de 4 dimensiones (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3) definidas por las ecuaciones (8,15) y (9,15) deben coincidir entre sí. Es fácil demostrar en este caso que se cumple la fórmula (7,15). Por lo tanto,

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = k(\beta)(a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2).$$

Si consideramos el movimiento del primer sistema respecto al segundo, de velocidad $-\beta$, obtendremos análogamente

$$a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = k(-\beta)(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2),$$

de donde

$$k(\beta) \,.\, k(-\beta) = 1.$$

Pero, por otro lado, puesto que los sistemas son equivalentes, $k(\beta) = k(-\beta)$ y, por consiguiente, $k(\beta) = \pm 1$.

Al realizar la transformación (5,15) sobre las variables x'_i, las variables a_i también se someten a una transformación lineal; por eso el número de signos más y menos que tiene la forma cuadrática de a_i no puede variar. De modo que $k(\beta) = 1$ y la forma $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ no deben variar con la transformación (5,15) Por lo tanto, esta transformación de las variables a_i es una transformación de Lorentz. La transformación lineal de las variables a_i correspondiente a la transformación (5,15) de las x_i se da por una matriz inversa y traspuesta de la matriz (5,15). Entonces la propia transformación (5,15) es una transformación de Lorentz (véase el final del 1 del § 14), que es lo que se quería demostrar.

§ 16. RESEÑA DE LOS RESULTADOS PRINCIPALES DE LA TEORÍA DEL PROBLEMA DE CAUCHY Y ALGUNAS INVESTIGACIONES DE LAS ECUACIONES HIPERBÓLICAS GENERALES

Hasta ahora hemos tratado del problema de Cauchy para la ecuación de ondas (1,12). En este epígrafe, sin realizar las demostraciones correspondientes, daremos una reseña breve de los resultados principales de la teoría del problema de Cauchy para ecuaciones hiperbólicas generales. Concentremos nuestra atención principalmente en ecuaciones lineales de segundo orden.

1. La ecuación lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Cu + D, \quad (1,16)$$

donde los coeficientes A_{ij}, A_{0i}, B_i, B_0, C y D son funciones de $t, x_1, \ldots, x_n$ se llama *t-hiperbólica* en una región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$ si se cumple la siguiente condición. Cada recta que pase por el origen de coordenadas en el espacio real $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ debe intersectar la superficie

$$1 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n) \, \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{n} A_{0i}(t, x_1, \ldots, x_n) \, \alpha_i \quad (2,16)$$

en dos puntos reales distintos. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfacen la ecuación (2,16), la dirección del hiperplano, cuya normal es paralela al vector $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, es característica (véase § 3) en el espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Llamemos cono característico de la ecuación (1,16) en el *punto* $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ a una superficie K con un punto singular cónico en $t = t^0$, $x_i = x_i^0$ cuyo hiperplano tangente tiene dirección característica en cada punto de K.

Si

$$F(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

es la ecuación de la superficie del cono característico (en general de cualquier superficie característica (véase § 3)), la función F debe satisfacer la ecuación

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_{0i} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Para cada punto $(t^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de la región G, donde la ecuación (1,16) es t-hiperbólica, se tiene un cono característico único situado en esta región y con vértice en el citado punto, que intersecta cada hiperplano $t =$ const. formando una superficie cerrada S, siempre que $|t - t^0|$ sea suficientemente pequeño. Este cono, conjuntamente con la parte del hiperplano $t =$ const. limitada por la superficie S, limita una cierta región K'.

Si $n = 1$ el cono característico degenera en 2 líneas l_1 y l_2 que parten del punto (t^0, x_1^0) y la base de este cono degenera en segmento de la recta $t =$ const. contenido entre los puntos de intersección de esta recta con las líneas l_1 y l_2.

2. Existe un número L dependiente de n tal que para todas las funciones $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ dadas en una región G_0 del hiperplano $t = t_0$, en el cual estas funciones tienen L derivadas continuas, existe una solución única continua, al igual que todas sus derivadas hasta el segundo orden inclusive, de la ecuación t-hiperbólica (1,16) que satisface las condiciones

$$\left.\begin{aligned} u(t_0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{3,16}$$

Esta solución queda determinada de modo único por las condiciones (3,16) en todo punto $(t, x_1, \ldots, x_n)$, si la base del cono característico con vértice en este punto está completamente contenida en la región G_0. Designemos por G el conjunto de todos los puntos $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Si las funciones $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ al igual que sus derivadas hasta el orden L varían suficientemente poco, *la solución correspondiente del problema de Cauchy también varía poco en toda la región* G. Por lo tanto, el problema de Cauchy para la ecuación (1,16) está correctamente planteado.

Para ecuaciones hiperbólicas lineales con coeficientes constantes que contienen solamente miembros con segundas derivadas, $L = \left[\frac{n}{2}\right] + 2$; S. L. Soboliev demostró que para ecuaciones lineales generales de segundo orden $L \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 3$; se acepta que los coeficientes de la ecuación satisfacen ciertas condiciones de derivabilidad que de antemano se cumplen si todos los coeficientes de la ecuación tienen derivadas continuas hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 2$ inclusive.[32]

3. Diremos que para la ecuación (1,16) no hay difusión de ondas en la región considerada G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, si el valor de la solución u del problema de Cauchy en el vértice $(t, x_1, \ldots, x_n)$ del cono característico depende sólo de los valores que toman $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$ y sus derivadas en la frontera de la base de este cono, cualquiera que sea la posición del cono característico dentro de la región G. En el caso contrario diremos que hay difusión de ondas. Hadamard[33] demostró que para n par y para $n = 1$ siempre se tiene difusión de ondas. Matisson[34] en 1939 investigó el caso $n = 3$. Encontró que para $n = 3$ todas las ecuaciones hiperbólicas que no tienen difusión de ondas son iguales a la ecuación (1,13), salvo en ciertas transformaciones no esenciales; todas estas ecuaciones se obtienen de la ecuación (1,13) mediante las siguientes transformaciones sencillas:

a) sustitución de las variables independientes,

b) sustitución lineal de la función u,

c) multiplicación de ambos miembros de la ecuación por una función de $t, x_1, \ldots, x_n$.

---

[32] S. L. Soboliev. Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950; colección matem. 1 (43) : 1 (1936), 39 - 72.

[33] Hadamard, Le probléme de Cauchy, París, 1932, 209 - 241.

[34] Matisson, Acta Mathematica 71, Nº 3 - 4, (1939), 249.

Recientemente se ha demostrado que para cualquier $n \geqslant 5$ e impar existen ecuaciones hiperbólicas que no tienen difusión de ondas y que no se reducen a la ecuación (1,13) mediante transformaciones del tipo señalado.[35]

4. En este epígrafe hemos considerado hasta ahora sólo el caso cuando las condiciones de Cauchy se dan sobre un hiperplano $t =$ const. El caso cuando las condiciones de Cauchy se dan sobre cualquier superficie se reduce a este caso especial mediante una *sustitución de las variables independientes, siempre que los conos* característicos con vértices suficientemente próximos a esta superficie la intersecten según superficies cerradas de $(n - 1)$ dimensiones.

5. La ecuación no lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(t, x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_j}, \ldots\right) \qquad (4,16)$$

se llama, en una región G del espacio $(t, x_1, \ldots, x_n)$, *t-hiperbólica* cerca de cierta función $u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$, dada en la región G, si en esta región es t-hiperbólica la ecuación lineal

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geqslant i}}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} A_{0j} \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial x_j}; \qquad (5,16)$$

[35] Stellmacher, Math. Annalen 130 : 3 (1955), 219 - 233.

donde A_{ij} son las derivadas parciales del miembro derecho de la ecuación (4,16) respecto a $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ calculadas para

$$u \equiv u_0(t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ x_0 = t).$$

Para la ecuación no lineal (4,16) el problema de Cauchy está correctamente planteado si para $t = t_0$ las condiciones dadas

$$u(t_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n),$$
$$u'_t(t_0, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n),$$

son tales que la ecuación (5,16) será t-hiperbólica cerca de la función $u_0(t, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n) + (t - t_0)\, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$. S. L. Soboliev demostró[36] que para una ecuación no lineal hiperbólica $L \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 4$, suponiéndose que la función F que figura en el miembro derecho de la ecuación (4,16) tiene derivadas continuas respecto a todos los argumentos hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 3$.

6. El sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant n_j} A_{ij}^{(k_0 k_1 \ldots k_n)}(t, x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} =$$
$$= f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

[36] S. L. Soboliev, Actas de la AC de la URSS, Nº 2 - 3 (1938), 79 - 83; Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950.

se llama *t-hiperbólico* en el punto $(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ si para cualesquiera valores reales α_i, la suma de cuyos cuadrados es positiva, el determinante

$$\left| \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=n_j} A_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\, \lambda^{k_0}\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right|$$

tiene sólo raíces reales y distintas de λ. Análogamente se define un sistema no lineal t-hiperbólico cerca de una cualquiera de sus soluciones.

Se ha demostrado que para los sistemas hiperbólicos el problema de Cauchy está correctamente planteado.[37]

Para las ecuaciones con coeficientes constantes la definición de hiperbolicidad fue generalizada por Gårding del siguiente modo. Una ecuación

$$\sum_{0\leqslant k_0+k_1+\ldots+k_n\leqslant m} a_{k_0k_1\ldots k_n} \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} = 0$$

se llama hiperbólica respecto a la dirección $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, en la cual las ξ_i son reales y $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 > 0$, si

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n=m} a_{k_0k_1\ldots k_n} \xi_0^{k_0}\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \neq 0$$

[37] I. G. Petrovski, Colección mat. 2 (44) (1937), 815 – 870. Véase también Leray, Hyperbolic differential equations, Princeton, 1953; L. Gårding, Matemática (traducciones), Literatura extranjera, 2 : 1 (1958), 81 – 95.

y si existe un número real λ^* tal que

$$\sum_{0 \leqslant k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant m} a_{k_0 k_1 \ldots k_n} (\lambda \xi_0 + i\alpha_0)^{k_0} (\lambda \xi_1 + i\alpha_1)^{k_1} \ldots \ldots (\lambda \xi_n + i\alpha_n)^{k_n} \neq 0$$

para $\lambda > \lambda^*$ y α_i reales cualesquiera. Se ha demostrado que de todas las ecuaciones lineales con coeficientes constantes sólo para las ecuaciones hiperbólicas en el sentido señalado más arriba el problema de Cauchy está correctamente planteado, siempre que las funciones iniciales arbitrarias sean suficientemente suaves y estén dadas en el hiperplano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = 0.$$ [38]

En el estudio de las ecuaciones con coeficientes constantes desempeñan un papel importante las transformaciones de Fourier. Mediante las transformaciones de Fourier se ha estudiado el planteamiento correcto del problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (o dependientes de t) y se han encontrado algunos propiedades cualitativas de las soluciones de estos sistemas.[39]

[38] Gårding, Acta Mathematica, 85, No. 1 - 2 (1951), 1 — 62. Véase también I. M. Gelfand y G. E. Shilov, Funciones generalizadas, fascículo 3, Fizmatguiz, 1958 (capítulo 3).

[39] I. G. Petrovski, Boletín de la Universidad de Moscú, sección A, 1, fascículo 7, (1938); I. M. Gelfand y G. E. Shilov, Funciones generalizadas, fascículo 3, Fizmatguiz, 1958 (capítulo 3).

7. Para una ecuación t-hiperbólica con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n=m} a_{k_0,k_1,\ldots,k_n} \frac{\partial^m u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = 0 \qquad (6,16)$$

han sido obtenidas fórmulas que dan la solución del problema de Cauchy dadas las condiciones iniciales en el hiperplano $t = 0$.[40]

Para las ecuaciones de la forma (6,16) ha sido estudiado el problema de la difusión de ondas que ya hemos considerado para la ecuación de ondas. La superficie lateral del cono característico de la ecuación (6,16) con vértice en el punto $(t^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)$ divide, en general, la base del cono, situada en el hiperplano $t = 0$, en varias regiones. Llamaremos *lacuna* a una de esas regiones, si para variaciones cualesquiera de las condiciones iniciales (con tal que permanezcan suficientemente suaves) sólo dentro de esta región la solución del problema de Cauchy para la ecuación (6,16) no varía en el punto $(t^*, x_1^*, \ldots, x_n^*)$. Si la lacuna contiene la proyección del vértice del cono característico sobre el hiperplano $t = 0$, para la ecuación (6,16) no hay difusión de ondas. La existencia de lacunas para la ecuación (6,16) depende de las propiedades geométricas (topológicas) de la superficie

$$\sum_{k_0+k_1+\cdots+k_n=m} a_{k_0,k_1,\ldots,k_n} \lambda^{k_0} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = 0$$

[40] H e r g l o t z, Berichte der Sächsischen Akademie 78 (1926), 93 – 126, 287 – 318; 80 (1928), 69 – 114. I. G. P e t r o v s k i, Colección mat. 17 (59) : 3 (1945), 289 – 370. I. M. G e l f a n d y Z. Y. S h a p i r o, Logros de las ciencias matemáticas 10 : 3 (1955), 3 – 70.

para $\lambda = 1$ en el espacio complejo $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Se han encontrado las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de lacunas.

El problema de la difusión de ondas y de las lacunas ha sido considerado también para sistemas t-hiperbólicos generales.[41]

8. Expongamos el siguiente método aproximado de solución del problema de Cauchy (método de las diferencias finitas) para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7,16}$$

con las condiciones iniciales

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u'_t(0, x, y) = \psi(x, y).$$

Supongamos que las funciones iniciales $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ tienen derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive y que están definidas en un cuadrado G:

$$a < x < b; \quad c < y < d.$$

Tracemos tres familias de planos paralelos en el espacio (t, x, y):

$$t = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad x = m\delta, \quad y = n\delta.$$

Aquí Δ y δ son ciertos números positivos. Los números m y n recorren ciertos valores enteros sucesivos tales que siempre

$$a < m\delta < b \text{ y } c < n\delta < d.$$

---

[41] I. G. Petrovski, Noticias de la AC de la URSS, serie de mat. 8 (1944), 101 - 106; Colección mat. 17 (59) : 3 (1945), 289 - 370.

Para simplificar la exposición supongamos que

$$a = m_1\delta, \quad b = m_2\delta, \quad c = n_1\delta, \quad d = n_2\delta.$$

Sustituyamos en la ecuación (7,16) $u''_{tt}\ (k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[(k-1)\Delta, m\delta, n\delta] + u[(k+1)\Delta, m\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\Delta^2},$$

$u''_{xx}\ (k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[k\Delta, (m+1)\delta, n\delta] + u[k\Delta, (m-1)\delta, n\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2},$$

y $u''_{yy}\ (k\Delta, m\delta, n\delta)$ por

$$\frac{u[k\Delta, m\delta, (n+1)\delta] + u[k\Delta, m\delta, (n-1)\delta] - 2u(k\Delta, m\delta, n\delta)}{\delta^2}.$$

Es fácil comprobar que si $u\ (t, x, y)$ tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive, para Δ y δ suficientemente pequeños los errores que implica esa sustitución son pequeños. Después de la sustitución la ecuación diferencial (7,16) se convierte en una ecuación en diferencias que denotaremos por (k, m, n). Dándole a (k, m, n) distintos valores admisibles, obtendremos un sistema de ecuaciones en diferencias. La solución de este sistema la designaremos por $\bar{u}$.

De acuerdo con las condiciones iniciales planteamos

$$\bar{u}(0, m\delta, n\delta) = \varphi(m\delta, n\delta),$$

$$\frac{\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta) - \bar{u}(0, m\delta, n\delta)}{\Delta} = \psi(m\delta, n\delta).$$

Entonces las condiciones iniciales determinarán $\bar{u}(0, m\delta, n\delta)$ y $\bar{u}(\Delta, m\delta, n\delta)$ en todos los puntos nodos para los cuales los correspondientes puntos $(0, m\delta, n\delta)$ pertenecen a la región G.

Seguidamente, planteando las ecuaciones en diferencias $(1, m, n,)$, *hallaremos los valores de* $\bar{u}(2\Delta, m\delta, n\delta)$ *en todos los* puntos $(2\Delta, m\delta, n\delta)$ que sirven de vértices A' de las pirámides de la forma señalada en la figura 5.

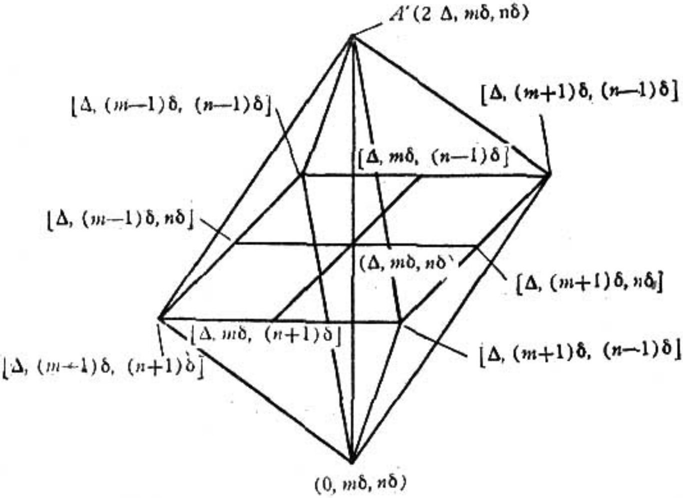

Fig. 5

Se supone que todos los puntos $[0, (m \pm 1)\,\delta, (n \pm 1)\,\delta]$ están dentro del cuadrado G, es decir, que

$$m_1 + 1 < m < m_2 - 1, \quad n_1 + 1 < n < n_2 - 1.$$

Considerando ahora las ecuaciones $(2, m, n)$, encontraremos los valores de $\bar{u}$ en los puntos $(3\Delta, m\delta, n\delta)$, donde

$$m_1 + 2 < m < m_2 - 2, \quad n_1 + 2 < n < n_2 - 2,$$

utilizando los valores hallados de $\bar{u}$ en los planos

$$t = \Delta, \quad t = 2\Delta.$$

Continuando estos cálculos, obtendremos los valores de $\bar{u}$ en todos los puntos $(k\Delta, m\delta, n\delta)$ situados dentro de la pirámide con base G en el plano $t = 0$, y cuyas caras laterales forman con este plano un ángulo arc tg $\frac{\Delta}{\delta}$.

Si $\Delta < \delta$ y δ es suficientemente pequeño, se puede demostrar que los valores encontrados para $\bar{u}(k\Delta, m\delta, n\delta)$ difieren tan poco como se quiera de los valores que tiene en estos puntos la función $u(t, x, y)$, que es la solución exacta del problema de Cauchy planteado.

De modo análogo se determinan los valores aproximados de $u(t, x, y)$ para $t < 0$.

Estos mismos razonamientos nos permiten resolver aproximadamente el problema de Cauchy para ecuaciones lineales hiperbólicas con cualquier número de variables independientes.[42]

Numerosos trabajos se han dedicado a la solución aproximada de ecuaciones hiperbólicas y de sistemas hiperbólicos por el método de las diferencias finitas.

---

[42] Véase, por ejemplo, Courant, Friedrich, Levy, Logros de las ciencias mat. fascículo VIII (1941), 147 - 160.

9. La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(y)\, h\,(x, y)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y)\, \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\, \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + c(x, y)\, u + f(x, y), \quad (8,16)$$

donde $k(0) = 0$, $k(y)$ es una función monótona creciente de y, y $h(x, y) > 0$ para $y \geqslant 0$, es hiperbólica para $y > 0$ y parabólica para $y = 0$. Se ha demostrado que el problema de Cauchy para la ecuación (8,16) con las condiciones iniciales definidas sobre la línea parabólica $y = 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x) \qquad (9,16)$$

está correctamente planteado, si los coeficientes de la ecuación son funciones suficientemente suaves y se cumple la condición

$$\lim_{y \to 0} \frac{y a(x, y)}{\sqrt{k(y)}} = 0.$$

Se pueden poner ejemplos donde al no cumplirse esta condición el problema de Cauchy (8,16), (9,16) no quede correctamente planteado.[43] Resultados análogos han sido obtenidos para ecuaciones con muchas variables independientes.

10. Los sistemas hiperbólicos de ecuaciones no lineales tienen una amplia aplicación en la mecánica, especialmente al estudiar los movimientos de un gas. Muchos problemas de mecánica obligan a considerar condiciones iniciales discontinuas y soluciones

---

[43] I. S. Berezin, Colección mat. 24 (66) : 2 (1949), 301 - 320. Protter, Canadian Journal of Math. 6 : 4 (1954), 542 - 553.

discontinuas. El problema de Cauchy para sistemas hiperbólicos no lineales con condiciones iniciales discontinuas posee una serie de peculiaridades que no tienen los sistemas lineales de ecuaciones. Consideremos algunos ejemplos. Como condición inicial para el problema de Cauchy escojamos funciones discontinuas de la forma

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \leqslant 0, \\ -1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

o bien

$$\psi(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x \leqslant 0, \\ 1, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

Para la ecuación lineal

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

la solución del problema de Cauchy con la condición inicial

$$u(0, x) = \varphi(x) \tag{10,16}$$

y la solución con la condición inicial

$$u(0, x) = \psi(x) \tag{11,16}$$

están determinadas unívocamente en todos los puntos del semiplano $t > 0$. En los puntos de la recta $x - t = 0$ estas soluciones tienen discontinuidades.[44]

[44] Las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos lineales se han investigado en el trabajo: Courant, Lax, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 : 11 (1956), 872 - 876.

Para la ecuación no lineal

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{12,16}$$

las soluciones del problema de Cauchy con las condiciones iniciales (10,16) y (11,16) no están determinadas unívocamente incluso en una vecindad tan pequeña como se quiera de la recta $t = 0$ sobre la cual están dadas las condiciones iniciales.

En efecto, tracemos en el espacio (t, x, u) las características de la ecuación (12,16) que pasan por los puntos $(0, x, u(0, x))$. Estas características son rectas paralelas al plano (t, x).[45] Si $u(0, x) = \varphi(x)$, las proyecciones de estas características sobre el plano (t, x) cubren todos los puntos del semiplano $t > 0$. Los puntos de la región Q situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$ se cubren dos veces por las proyecciones de estas características y además con distintos valores de u (Fig. 6). De aquí es fácil inferir que la solución $u(t, x)$ en los puntos situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$ no puede determinarse unívocamente por la condición inicial.

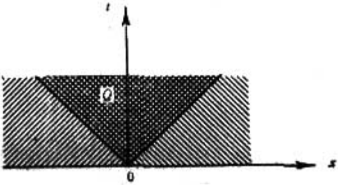

Fig. 6

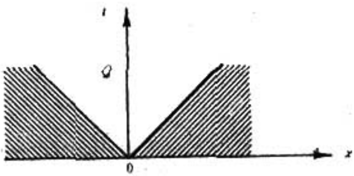

Fig. 7

[45] La característica de la ecuación (12,16) que pasa por el punto $(0, x_0, u(0, x_0))$, está definida por las ecuaciones $u = u(0, x_0)$, $x = u(0, x_0) t + x_0$. Véase I. G. Petrovski, Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, Gostiejizdat, 1952, § 55.

Si $u(0, x) = \psi(x)$, las proyecciones de las características de la ecuación (12,16)), que pasan por los puntos $(0, x, \psi(x))$ en el espacio (t, x, u), cubren solamente los puntos que no pertenecen a la región Q (Fig. 7), es decir, la solución no puede determinarse por la condición inicial en los puntos situados entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$.

De este modo, para determinar unívocamente la solución del problema de Cauchy en el semiplano $t > 0$ para la ecuación no lineal (12,16) con las condiciones iniciales (10,16) u (11,16), es necesario plantear el problema de Cauchy de otra manera.

Así, para el sistema hiperbólico de ecuaciones que describe el movimiento unidimensional de un gas se introducen relaciones complementarias entre las funciones incógnitas en las líneas de discontinuidad. Este sistema hiperbólico fue investigado por Riemann.[46] Sin embargo, no todas las condiciones adicionales en las líneas de discontinuidad señaladas por Riemann se cumplen para los procesos físicos reales. Las relaciones en las líneas de discontinuidad para el sistema hiperbólico fueron señaladas correctamente por Hugonio.[47] Estas relaciones se pueden obtener resolviendo el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de un gas cuando se toma en cuenta la viscosidad y la conducción del calor y se hacen tender a cero los coeficientes de viscosidad y de conducción del calor. Tomar en cuenta la viscosidad y la conducción del calor corresponde a introducir en el sistema de ecuaciones de primer orden derivadas de segundo orden que contienen como coeficiente un parámetro pequeño.

---

[46] B. Riemann, Sobre la propagación de ondas acústicas de amplitud finita. Obras, Gostiejizdat, 1948.

[47] L. D. Landau y E. M. Lifshits, Mecánica de medios continuos, Gostiejizdat, 1954.

Se puede determinar una solución del problema de Cauchy para la ecuación (12,16) establecida la condición inicial para $t = 0$, como el límite de las soluciones de la ecuación

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\varepsilon > 0)$$

con la misma condición inicial para $t = 0$. La solución del problema de Cauchy puede ser una función discontinua. Sobre la línea de discontinuidad de la solución de la ecuación (12,16) se cumplirán las condiciones

$$u(t, x+0) < u(t, x-0) \quad (t > 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u(t, x+0) + u(t, x-0)}{2},$$

donde $\frac{dx}{dt}$ es la tangente del ángulo entre la tangente a la línea de discontinuidad y el eje t; $u(x+0)$, $u(x-0)$ denotan, respectivamente, el límite a la derecha y el límite a la izquierda, en el punto x, de la función $u(x)$.

La función $u(t, x)$ igual a 1 si $x < 0$, e igual a -1 si $x > 0$, es la solución del problema de Cauchy así planteado para la ecuación (12,16) con la condición inicial (10,16).

La solución del problema de Cauchy con el nuevo planteamiento y la condición inicial (11,16) es la función $u(t, x)$, que es igual a 1 si $x - t > 0$, e igual a -1 si $x + t < 0$. En cada punto del semiplano $t > 0$ situado en la región Q, es decir, entre las rectas $x - t = 0$ y $x + t = 0$, la función $u(t, x)$ es igual a la tangente del ángulo que forma con el eje t la recta que une el punto dado con el origen de coordenadas. La posición de las proyecciones de las características, situadas sobre esta solución, está señalada en la Fig. 8. La función construida $u(t, x)$ es continua para $t > 0$. Es interesante observar que en el planteamiento señalado el problema de Cauchy puede tener solución continua, siendo discontinua la condición inicial.

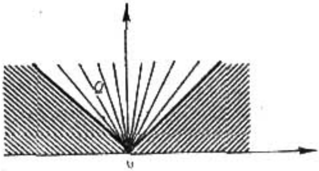
Fig. 8

Si consideramos condiciones iniciales suaves, la solución suave de las ecuaciones lineales hiperbólicas se determinará por las condiciones iniciales, en todos los puntos del semiplano $t > 0$ y para todas las condiciones iniciales, siempre que los coeficientes cumplan determinadas restricciones. Para ecuaciones hiperbólicas no lineales la solución suave existe, como regla general, sólo en una vecindad pequeña de la línea donde están dadas las condiciones iniciales. Debido a esto, también en las ecuaciones hiperbólicas no lineales surge la necesidad de considerar soluciones discontinuas.

El problema fundamental al estudiar las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos no lineales consiste en determinar la clase de funciones en la cual existe una solución generalizada única del problema de Cauchy que dependa continuamente, en un sentido determinado, de las condiciones iniciales. Esta cuestión ha sido bien estudiada para la ecuación general casilineal de primer orden.[48] Resulta que las propiedades cualitativas de las soluciones generalizadas de esta ecuación son análogas a las propiedades de

[48] O. A. Oleynyk, Logros de las ciencias mat. 12 : 3 (1957), 3 – 73; véase también: Logros de las ciencias mat. 14 : 2 (1959), 159 – 170.

las soluciones de un sistema de ecuaciones de la dinámica de los gases. Por eso, la ecuación casilineal de primer orden más sencilla

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0$$

se llama con frecuencia *ecuación modelo* de la dinámica de los gases.

El problema de las soluciones discontinuas de sistemas hiperbólicos no lineales está aún poco estudiado.[49] Este problema es de gran interés teórico y además tiene gran importancia en las aplicaciones.

---

[49] En "Logros de las ciencias matemáticas", 14 : 2 (1959), 76 - 188, aparece una discusión de los resultados correspondientes y el planteamiento detallado de una serie de problemas en el artículo de I. M. Gelfand.

SECCIÓN II

VIBRACIONES DE CUERPOS FINITOS

§ 17. INTRODUCCIÓN

1. La sección anterior del capítulo 2 fue dedicada al problema de Cauchy. Nuestra atención principal fue puesta en la ecuación de ondas (1,13) que describe las vibraciones de cuerpos elásticos isotrópicos y homogéneos. El estudio de la función $u(t, x_1, ..., x_n)$ que caracteriza estas vibraciones en los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ para t suficientemente próximo al instante inicial se reduce al planteamiento del problema de Cauchy. El valor de la solución $u(t, x_1, ..., x_n)$ de la ecuación (1,13) en el vértice $P(t, x_1, ..., x_n)$ del cono característico, queda completamente determinado por los valores de las funciones iniciales φ_0 y φ_1 en la base C_P de este cono; por eso al estudiar $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ podemos no tomar en consideración la frontera siempre que C_P no salga de la región donde están dadas las funciones φ_0 y φ_1, es decir, mientras C_P no intersecte la frontera del cuerpo. En este sentido se puede decir que en la sección anterior hemos estudiado vibraciones de cuerpos infinitos o sin frontera.

En la presente sección vamos a estudiar las vibraciones de los cuerpos tomando en cuenta el influjo de sus contornos. Limitándonos de nuevo al estudio de vibraciones de cuerpos isotrópicos homogéneos, llegamos al problema de hallar las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1,17}$$

que satisfagan para $t = 0$ las *condiciones iniciales*

$$\left.\begin{aligned} u(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_0(x_1, \ldots, x_n), \\ u'_t(0, x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{2,17}$$

cuando el punto $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a la región dada G, y verifiquen las *condiciones de contorno* dadas para todo t en la frontera de G. Consideraremos solamente condiciones de contorno homogéneas de la forma

$$u = 0, \tag{3,17$_1$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{3,17$_2$}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, \tag{3,17$_3$}$$

donde σ es una función continua no negativa que no depende de t y está definida en el contorno de G, y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior al contorno de G (véase § 1).

Algunos problemas físicos, por ejemplo, el problema de las vibraciones de cuerpos elásticos no homogéneos, consisten en buscar para iguales condiciones iniciales (2,17) y las condiciones de contorno (3,17), las soluciones de ecuaciones de la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + f. \tag{4,17}$$

Aquí ρ, p_i, q y f son funciones suficientemente suaves de x_k y, generalmente, se tiene que

$$\rho > \rho_0 > 0; \quad p_i > p_{i0} > 0; \quad q \geqslant 0.$$

Como la ecuación de ondas (1,17) y la ecuación (4,17) no varían si sustituimos t por $-t$, los razonamientos que hagamos para las soluciones de estas ecuaciones con $t > 0$ serán válidos también para $t < 0$.

El problema de encontrar la solución de la ecuación (4,17) con las condiciones iniciales (2,17) y una de las condiciones de contorno (3,17) se llama *problema mixto*. Toda la presente sección del capítulo 2 está dedicada a este problema.

2. El problema mixto no es el único problema que se puede plantear para la ecuación (1,17) o (4,17) en una región acotada. En la práctica frecuentemente aparecen otros tipos de problemas para estas ecuaciones. Veamos una serie de esos problemas para la ecuación sencilla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5,17}$$

1) *Problema de Gursat. Hallar la solución de la ecuación (5,17) a partir de sus valores en dos trozos de las características.*

En el segmento OA (fig. 9) de la característica $t + x = 0$

$$u(t, x) = \varphi(x).$$

En el segmento OB de la característica $t - x = 0$

$$u(t, x) = \psi(x).$$

Para que la solución sea continua debe cumplirse la condición

$$\varphi(0) = \psi(0)$$

(S. L. Soboliev, Ecuaciones de la física matemática, Gostiejizdat, 1954, pp. 63 - 67).

2) *Hallar la solución de la ecuación* (5,17) *si se conocen sus valores en el segmento* OB *de la característica* $t = x$ *y en la línea* L *que sale del punto* O, *se encuentra dentro del ángulo formado por las características* $t = \pm x$ *y se corta con cada característica* $t = x + C$ *en un solo punto* (*fig. 10*).

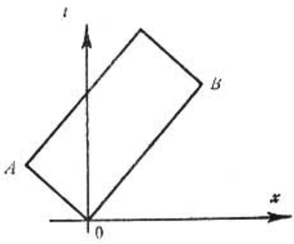

Fig. 9

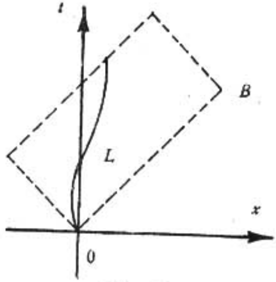

Fig. 10

El lector puede resolver fácilmente estos problemas utilizando la representación de la solución (5,17) en la forma

$$u(t, x) = f_1(t + x) + f_2(t - x)$$

(véase el ejemplo 1 del § 6).

La solución en ambos casos se determina en el rectángulo formado por las características que pasan por los extremos de las líneas en las cuales están dados los valores de la función u.

3) Dados los valores de la función $u(t, x)$ en las dos líneas L y L_1 (que supondremos rectas, para simplificar) que salen del origen de coordenadas, se presentan dos casos esencialmente distintos; a) cuando L y L_1 están dentro de un mismo ángulo formado por las características que salen del punto O y b) cuando L y L_1 están separadas por una característica.

En el primer caso, para determinar la única solución de la ecuación (5,17), es suficiente dar los valores de la propia función $u(t, x)$ en las líneas L y L_1; mientras que en el segundo caso, para una de las líneas es necesario dar "las condiciones de Cauchy", es decir, los valores de la propia solución y de su primera derivada en la dirección de la normal a esta línea (véase Gursat, Curso de análisis matemático, tomo III, primera parte, GTTI, 1933, pp. 100-112).

3. Nuestras consideraciones ulteriores serán aplicables, en la mayor parte de los casos, para un n cualquiera. Para mayor comodidad, en las deducciones y en las figuras, realizaremos muchos razonamientos sólo para $n = 2$ y $n = 1$, indicando especialmente los enunciados para otras n sólo en los casos que difieran esencialmente.

Suponiendo, como acabamos de decir, que $n = 2$, consideraremos soluciones $u(t, x_1, x_2)$ de las ecuaciones de la forma (1,17) o (4,17) para $0 \leqslant t \leqslant T$, cuando el punto (x_1, x_2) se encuentra dentro de la región G acotada por la línea l formada por un número finito de arcos l_i con tangente que varía continuamente.

O en otras palabras: suponiendo que $n = 2$, consideraremos las soluciones $u(t, x_1, x_2)$ de las ecuaciones (1,17) o (4,17) determinadas dentro del cilindro C_T cuyas generatrices son paralelas al eje Ot y pasan por la frontera de la región G situada en el plano $t = 0$, y cuyas bases se encuentran en los planos $t = 0$ y $t = T$. En toda esta sección supondremos, sin decirlo explícitamente en cada caso, que las soluciones consideradas $u(t, x_1, x_2)$ satisfacen la ecuación (1,17) o (4,17) dentro de C_T y son continuas al igual que sus primeras y segundas derivadas en $\overline{C}_T$, es decir, en el cilindro C_T y en su frontera.

§ 18. UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA MIXTO

Sean $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ dos soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{1,18}$$

determinadas en el cilindro C_T, que tienen todas las propiedades indicadas en el epígrafe anterior y son soluciones de un mismo problema mixto, es decir, supondremos que para $t = 0$ satisfacen las mismas condiciones iniciales (2,17) y en la superficie lateral del cilindro C_T verifican las mismas condiciones de contorno, uno de los tipos (3,17). Nuestro objetivo es demostrar que las funciones $u_1(t, x_1, x_2)$ y $u_2(t, x_1, x_2)$ coinciden en todo punto dentro del cilindro C_T. La demostración de esta afirmación es equivalente a la demostración del siguiente teorema.

Teorema. La función

$$u(t, x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2) - u_1(t, x_1, x_2),$$

que satisface la ecuación (1,18) *dentro de* C_T, *es continua al igual que sus primeras y segundas derivadas en* $\overline{C}_T$, *satisface en la superficie lateral de* C_T *una de las condiciones* (3,17), *en* $t = 0$ *se hace nula al igual que* u'_t *y es idénticamente nula en* C_T.

Demostración. Consideremos la integral

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dt\, dx_1\, dx_2, \tag{2,18}$$

tomada por el cilindro C_{t^*}, donde $0 < t^* \leqslant T$. Como la función u satisface la ecuación (1,18), la integral es igual a cero. Transformémosla en una integral por la superficie del cilindro C_{t^*}, del mismo modo que hicimos en el § 11 al demostrar la unicidad de la solución del problema de Cauchy. Obtendremos

$$\frac{1}{2}\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2)\right] ds = 0.$$

Aquí l, como siempre, denota el contorno de la región G, ds es un elemento del arco del contorno. La primera integral se toma por la base superior del cilindro C_{t^*}, la segunda por la inferior y la tercera por su superficie lateral. La última integral se puede escribir en la forma

$$\int_0^{t^*} dt \int_l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Obtenemos entonces

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=t^*} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]_{t=0} dx_1\, dx_2 -$$

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0. \quad (3{,}18)$$

La segunda de estas integrales es igual a cero en virtud de las condiciones iniciales. Si en el contorno de G siempre $u = 0$, también $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, y por eso la tercera integral es también igual a cero. Siendo esta última también igual a cero en el caso en que en el contorno $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Si en el contorno $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma\, u = 0$, esa integral se convierte en la integral

$$-\int_0^{t^*} dt \int_l \sigma u\, \frac{\partial u}{\partial t}\, ds = -\frac{1}{2}\int_l \sigma\, ds \int_0^{t^*} \frac{\partial\,(u^2)}{\partial t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_l \sigma u^2\,(t^*)\, ds + \frac{1}{2}\int_l \sigma u^2\,(0)\, ds. \quad (4{,}18)$$

La última integral es igual a cero en virtud de las condiciones iniciales. De modo que para cada t^* entre 0 y t, si en el contorno de G siempre $u = 0$ o $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, se cumple

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 = 0, \quad (5,18)$$

y si en el contorno de G $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$, se cumple

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 + \frac{1}{2} \int_l \sigma u^2 (t^*)\, ds = 0. \quad (6,18)$$

Como que $\sigma \geqslant 0$, de las relaciones (5,18) y (6,18) se deduce que cualquiera que sea la condición de contorno (3,17)

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1\, dx_2 = 0. \quad (7,18)$$

Como suponemos que la función u tiene todas las primeras derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que t^* es un número arbitrario entre 0 y T, de la relación (7,18) se deduce que en todo punto de $\overline{C}_T$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Es decir, u es constante en todo C_T. Y como $u(0, x_1, x_2) \equiv 0$, en todo el cilindro C_T

$$u(t, x_1, x_2) \equiv 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que la integral en el miembro izquierdo de (7,18) es igual, salvo un factor constante, a la suma de la energía potencial y cinética de una membrana vibrante en el instante $t = t^*$ y que la igualdad (3,18), para las condiciones de contorno $(3,17)_1$ y $(3,17)_2$ expresa la ley de conservación de la energía (véase el § 1, subepígrafe 3).

Problema. Demuestre la unicidad en C_T de la solución del problema con las condiciones iniciales (2,17) y las condiciones de contorno $(3,17)_1$ para la ecuación (4,17).

§ 19. DEPENDENCIA CONTINUA ENTRE LA SOLUCIÓN Y LAS CONDICIONES INICIALES

Teorema. Sean $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ *dos soluciones de la ecuación* (1,17) *para* $n = 1$ *en el cilindro* C_T.[50]

Supongamos que ambas soluciones satisfacen en la superficie lateral las mismas condiciones de contorno, uno de los tipos (3,17) *y que para* $t = 0$

$$u_1(0, x) = \varphi_0^{(1)}(x); \quad u'_{1t}(0, x) = \varphi_1^{(1)}(x);$$
$$u_2(0, x) = \varphi_0^{(2)}(x); \quad u'_{2t}(0, x) = \varphi_1^{(2)}(x).$$

[50] Es evidente que para $n = 1$ el cilindro C_T es un réctángulo con lados paralelos a los ejes Ot y Ox.

Si las diferencias

$$\varphi_i^{(2)}(x) - \varphi_i^{(1)}(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 0,1)$$

y la primera derivada de la función $\varphi_0(x)$ *tienen un valor absoluto suficientemente pequeño en todo punto de* G, *entonces la diferencia*

$$u_2(t, x) - u_1(t, x) = u(t, x)$$

es tan pequeña como se quiera en valor absoluto en todo C_T.

Un teorema análogo se puede demostrar para las soluciones de la ecuación (1,17) en C_T, cualquiera que sea n. Pero, en este caso, para asegurar que la diferencia

$$u_2(t, x_1, \ldots, x_n) - u_1(t, x_1, \ldots, x_n) = u(t, x_1, \ldots, x_n)$$

sea pequeña en todo el cilindro C_T, es necesario que difieran poco de cero en G tanto las funciones

$$u(0, x_1, \ldots, x_n) \text{ y } u'_t(0, x_1, \ldots, x_n),$$

como sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ inclusive; además, es necesario que en el contorno de la región G, que es la base del cilindro C_T, las derivadas de estas diferencias hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right]$ satisfagan ciertas relaciones complementarias, que satisfacen automáticamente para $n = 1$. La demostración de este teorema para $n > 1$ es mucho más complicada, por eso no la hacemos.

Demostración del teorema para $n = 1$. Consideremos de nuevo una integral del tipo (2,18) por el cilindro C_T, que ahora degenera en un rectángulo $\{0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b\}$. Esta integral sigue siendo igual a cero para todo t^* entre 0 y T. Transformándola de modo análogo al anterior, obtendremos

$$\iint_{\sigma_{t^*}} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dt\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=0} dx -$$

$$- \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b} dt + \int_0^{t^*} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a} dt = 0.$$

De aquí, como $a < b$ y

$$u(0, x) = \varphi_0;\quad u'_t(0, x) = \varphi_1;\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} = \frac{\partial u}{\partial n};\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = -\frac{\partial u}{\partial n},$$ [51]

tenemos

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]_{t=t^*} dx = \frac{1}{2}\int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'^2(x)]\, dx +$$

$$+ \int_0^{t^*} \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=a} dt + \int_0^{t^*} \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=b} dt. \quad (1,19)$$

Si $u(t, a) = 0$ o $\dfrac{\partial u(t, a)}{\partial n} = 0$, entonces

$$\int_0^{t^*} \frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=a} dt = 0.$$

---

[51] Recordemos que $\dfrac{\partial}{\partial n}$ significa siempre la derivada en la dirección de la normal exterior.

Si para $x = a$ se cumple la condición de contorno $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_a u = 0$, entonces

$$\int_0^{t^*} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=a} dt = -\sigma_a \int_0^{t^*} u \frac{\partial u}{\partial t}\, dt =$$

$$= -\frac{\sigma_a u^2(t^*, a)}{2} + \frac{\sigma_a u^2(0, a)}{2}.$$

Igualdades análogas se pueden escribir para $x = b$, si en $x = b$ se impone una de las siguientes condiciones: $u(t, b) = 0$, $\frac{\partial u(t, b)}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_b u = 0$.

Por lo tanto, omitiendo si es necesario los sumandos negativos del miembro derecho de la fórmula (1,19) tenemos, para cualquier condición de contorno (3,17),

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_{t=t^*} dx \leqslant \int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'(x)]\, dx +$$

$$+ \sigma_a \varphi_0^2(a) + \sigma_b \varphi_0^2(b).^{52} \quad (2,19)$$

Como el miembro derecho, por suposición, es pequeño, se deduce que también el miembro izquierdo es pequeño. Designando por ε^2 el valor del miembro derecho de la desigualdad

---

[52] Para las condiciones de contorno $u = 0$ ó $\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ esta desigualdad se reduce a una igualdad que expresa la ley de la conservación de la energía.

(2,19), hallamos que para todo t^* entre 0 y T y para todo x, si $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2, \tag{3,19$_1$}$$

$$\int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2_{t=t^*} dx \leqslant \varepsilon^2. \tag{3,19$_2$}$$

De la desigualdad $(3,19)_1$ obtenemos, aplicando la desigualdad de Buniakovski,

$$u(t^*, x) - u(t^*, a) \mid \leqslant \int_a^x \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx =$$

$$= \int_a^x 1 \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx \leqslant \left[\int_a^x dx \int_a^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{b-a}\, \varepsilon. \tag{4,19}$$

Del mismo modo, de la desigualdad $(3,19)_2$ obtenemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u\, dx\right| = \left|\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dx \leqslant \sqrt{b-a}\; \varepsilon. \tag{5,19}$$

Pero

$$\left|\int_a^b u(t^*, x)\, dx - \int_a^b u(0, x)\, dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{t^*}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u(t, x)\, dx\right] dt\right| \leqslant t^*\, \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

De aquí

$$\left| \int_a^b u(t^*, x)\, dx \right| \leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \left| \int_a^b \varphi_0(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant t^* \varepsilon \sqrt{b-a} + \max |\varphi_0| \; (b-a). \quad (6,19)$$

Integrando la desigualdad (4,19) respecto a x entre $x = a$ y $x = b$, encontramos

$$\left| \int_a^b u(t^*, x)\, dx - (b-a)\, u(t^*, a) \right| \leqslant \varepsilon\, (b-a)^{\frac{3}{2}} \quad (7,19)$$

y estimando la integral en el miembro izquierdo de la fórmula (7,19) mediante (6,19), comprobaremos que los valores $|u(t^*, a)|$ son tan pequeños como se quiera para cualquier t^* del intervalo $(0, T)$ *y para* ε *y* max $|\varphi_0|$ *suficientemente pequeños.* De aquí, empleando de nuevo la desigualdad (4,19), obtendremos que $|u(t^*, x)|$ es pequeño en todo el rectángulo C_T, que es lo que se quería demostrar.

Observación 1. Si en uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por ejemplo, para $x = a$, está dada la condición $u = 0$ para todo $t \geqslant 0$, de la relación (4,19) se desprende directamente que $|u(t, x)|$ es pequeño en C_T.

Si en uno de los extremos del segmento $[a, b]$, por ejemplo, para $x = a$, estuviese dada la condición $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_a u = 0$ para $\sigma_a > 0$, de la relación (1,19) se deduciría que

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx + \sigma_a u^2\ (t^*, a) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b [\varphi_1^2(x) + \varphi_0'^2(x)]\, dx + \sigma_a \varphi_0^2(a) + \sigma_b \varphi_0^2(b) \leqslant \varepsilon^2.$$

De aquí

$$\sigma_a u^2 (t^*, a) \leqslant \varepsilon^2,$$

y de nuevo, en virtud de que $| u(t^*, x) |$ es pequeño, obtendríamos directamente de (4,19) que también lo es $| u(t^*, a) |$ en C_T.

Observación 2. Si n fuese mayor que 1, del mismo modo que en el caso $n = 1$, encontraríamos que al ser $| u_t' (0, x_1, ..., x_n) |$ $| u(0, x_1, ..., x_n) |$ y las derivadas $\left| \dfrac{\partial u(0, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \right|$ uniformemente pequeños, también

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]_{t = t^*} dx_1 \ldots dx_n. \tag{8,19}$$

sería pequeña. Pero del hecho de que esta integral sea pequeña para todo t^* entre 0 y T y de que $| u(0, x_1, \ldots, x_n |$ también lo sea, es imposible deducir que $| u |$ es pequeño en C_T. Se puede poner un ejemplo de una función u para la cual esta integral es pequeña para todos los t^* considerados y que aún así en algunos puntos C_T toma valores muy grandes a pesar de que $| u(0, x_1, \ldots, x_n) |$ es pequeño. Para garantizar que $|u|$ sea pequeño en C_T es suficiente que, además de la integral (8,19), sean pequeñas en $t = t^*$ las integrales de la forma (8,19) donde en lugar de u figuren todas las posibles derivadas de la forma

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \text{ para } k \leqslant \left[\frac{n}{2} \right],$$

y que los valores de $|u(0, x_1, \ldots, x_n)|$[53] sean uniformemente pequeños. Es así precisamente como se demuestra que $|u|$ es pequeño en C_r siempre que φ_0, φ_1 y sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ sean suficientemente pequeñas en valor absoluto y se cumplan ciertas condiciones complementarias para los valores de φ_0 y φ_1 en el contorno de G.[54]

Observación 3. De la demostración del teorema se infiere que el mismo sigue siendo válido si en lugar de exigir que $|u(0,x)|$, $|u'_x(0,x)|$ y $|u'_t(0,x)|$ *sean uniformemente pequeños*, pedimos que sean pequeñas las integrales

$$\int_a^b u'^2_x(0, x)\, dx \quad \text{y} \quad \int_a^b u'^2_t(0, x)\, dx$$

y uno de los dos valores siguientes: $|u(0, a)|$ o $|u(0, b)|$.

En efecto, en las desigualdades (2,19) y (6,19) hemos supuesto solamente la pequeñez de estas integrales y de $|u(0, x)|$.

Pero si, por ejemplo, $|u(0, a)|$ es pequeño, entonces

$$|u(0, x)| = \left|u(0, a) + \int_a^x u'_x(0, x)\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |u(0, a)| + \sqrt{b-a}\left(\int_a^b u'^2_x(0, x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

de donde se deduce que $|u(0, x)|$ es uniformemente pequeño.

---

[53] Esto se deduce de los llamados teoremas de imersión de S. L. Soboliev (véase S. L. Soboliev, Algunas aplicaciones del análisis funcional a la física matemática, L., 1950).

[54] Véase M. Krzyzanski, J. Schauder, Studia Mathematica, t. VI, 1936, 162 - 189.

Problema 1. Demuestre el teorema de la dependencia continua de la solución respecto a las condiciones iniciales para la ecuación (4,17), si $n = 1$ y la condición de contorno es $(3,17)_1$.

Problema 2. Demuestre que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - qu + f(t, x)$$

($p(x) > 0$, $q > 0$ y $f(t, x)$ son funciones suficientemente suaves) que satisface las condiciones iniciales (2,17) y la condición de contorno $(3,17)_1$ varía en C_T en valor absoluto tan poco como se quiera, si la función $f(t, x)$ varía en C_T suficientemente poco.

§ 20. MÉTODO DE FOURIER PARA LA ECUACIÓN DE LA CUERDA

1. Para resolver el problema mixto se puede aplicar en muchos casos el llamado método de Fourier. En el presente epígrafe consideraremos la aplicación de este método en un ejemplo concreto. En el siguiente, expondremos el esquema general de aplicación de este método a la resolución del problema mixto para una ecuación lineal de segundo orden con dos variables independientes.

Supongamos que se busca la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1,20}$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) &= \varphi_0(x), \\ u'_t(0, x) &= \varphi_1(x), \\ 0 \leqslant x &\leqslant l, \end{aligned}\right\} \tag{2,20}$$

y las condiciones de contorno para $t > 0$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{3,20}$$

Primero trataremos de hallar las soluciones no triviales, es decir, las que no son idénticamente nulas, de la ecuación (1,20) del tipo

$$u(t, x) = T(t)\, X(x), \tag{4,20}$$

que satisfagan solamente las condiciones de contorno (3,20). Consideramos que $T(t)$ depende sólo de t y $X(x)$ sólo de x. Sustituyendo el miembro derecho de (4,20) por u en la ecuación (1,20), obtendremos

$$XT'' = X''T \quad \text{o} \quad \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{5,20}$$

El miembro izquierdo de la última igualdad no depende de x y el derecho no depende de t. Por lo tanto cada una de las expresiones $\frac{T''}{T}$ y $\frac{X''}{X}$ no depende ni de x ni de t, es decir, es constante. Designemos esta constante por $-\lambda$. Entonces de la igualdad (5,20) se desprende que

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{6,20}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{7,20}$$

De ese modo la ecuación (5,20) se descompone en dos ecuaciones, una de las cuales contiene sólo funciones de t y la otra sólo funciones de x. En estos casos se dice que las *variables se han separado.*

Para obtener una solución no trivial $u(t, x)$ de la forma (4,20), que satisfaga las condiciones de contorno (3,20), es necesario hallar una solución no trivial, es decir, que no sea idénticamente nula, de la ecuación (7,20) que satisfaga las condiciones de contorno

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{8,20}$$

Las fórmulas que dan la solución general de la ecuación (7,20) tienen una forma esencialmente distinta según

$$\lambda < 0, \ \lambda = 0 \ \text{o} \ \lambda > 0.$$

Consideremos por separado cada uno de estos tres casos

Caso 1

($\lambda < 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) se escribe en la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Para que se verifiquen las condiciones de contorno (8,20) debe cumplirse

$$C_1 + C_2 = 0 \ \text{y} \ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Por consiguiente, debe cumplirse

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l}.$$

Pero esta última igualdad se cumple sólo si $C_1 = 0$, es decir, también $C_2 = 0$. Obteniéndose sólo la solución trivial de la ecuación (7,20).

Caso 2

($\lambda = 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) tiene la forma

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Para que $X(0) = 0$ es necesario que $C_1 = 0$. Entonces la condición $X(l) = 0$ toma la forma $C_2 l = 0$; es decir, es necesario que $C_2 = 0$. Por lo tanto, como en el caso anterior, llegamos a la conclusión de que solamente la solución trivial de la ecuación (7,20) puede satisfacer ambas condiciones de contorno (8,20).

Caso 3

($\lambda > 0$). En este caso la solución general de la ecuación (7,20) tiene la forma

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x.$$

Para que se verifique la condición de contorno $X(0) = 0$ debe cumplirse

$$C_1 = 0.$$

Y entonces la condición $X(l) = 0$ toma la forma

$$C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0,$$

ya que si $C_2 = 0$, obtendríamos la solución trivial. La ecuación

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0$$

se satisface si y sólo si

$$\sqrt{\lambda}\, l = k\pi, \text{ es decir, } \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2},$$

donde k es un número entero cualquiera o cero. Como suponemos que $\lambda > 0$, k no puede ser igual al cero. Para valores negativos de k, λ toma los mismos valores que para los k positivos con el mismo valor absoluto. Por eso todos los valores de λ para los cuales la ecuación (7,20) tiene soluciones no triviales que satisfacen las condiciones de contorno (8,20) están dados por la fórmula

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \text{ donde } k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{9,20}$$

El problema de encontrar las soluciones no triviales de la ecuación (7,20) que satisfagan las condiciones de contorno (8,20) es un caso particular del problema conocido como "Problema de los valores propios" o a veces "Problema de Sturm-Liouville" que son los apellidos de los dos matemáticos que lo investigaron. Los valores de λ, para los cuales nuestro problema tiene soluciones no triviales, se llaman *valores propios* y las soluciones no triviales de este problema se llaman *funciones propias* correspondientes al valor propio dado. En nuestro caso, al valor propio $\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ corresponde la función propia

$$X_k(x) = C_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x.$$

En virtud de la homogeneidad de la ecuación (7,20), las *funciones propias se determinan con exactitud que excluye solamente un factor constante* C_k. Escogiendo de cierto modo este factor, se puede obligar a la función propia $X_k(x)$ a obedecer una condición complementaria o, como se dice, se puede *"normalizar"* la función propia.

Es cómodo realizar esta normalización de manera que

$$\int_0^l X_k^2(x)\ dx = 1.$$

Para ello debe cumplirse

$$C_k = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

En este epígrafe aceptaremos, en lo que sigue, que

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x.$$

Volvamos ahora a la solución del problema mixto planteado al principio de este epígrafe. Sustituyendo en la ecuación (6,20) en lugar de λ su valor λ_k dado por la fórmula (9,20), obtendremos

$$T'' + \frac{k^2\pi^2}{l^2} T = 0.$$

De aquí

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t,$$

donde A_k y B_k son constantes arbitrarias.

Todas las funciones

$$u_k(t, x) = X_k(x)\, T_k(t) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \left(A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right)$$

satisfacen la ecuación (1,20) y las condiciones de contorno (3,30) para A_k y B_k cualesquiera. Trataremos de determinar estas constantes de modo que la serie infinita

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right] \qquad (10,20)$$

verifique tanto la ecuación (1,20) como las condiciones de contorno (3,20) y las condiciones iniciales (2,20). Empezaremos por las condiciones iniciales. En primer lugar, debe cumplirse que

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x). \qquad (11,20)$$

Además, si la serie es derivable término a término, debe cumplirse

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \qquad (12,20)$$

Supongamos que las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son desarrollables en series de sen $\frac{k\pi}{l} x$ según el segmento $[0, l]$ y que las series formadas por los módulos de los términos de estas series convergen uniformemente.

De la teoría de las series trigonométricas sabemos que esto siempre es posible, si las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son continuas al igual que sus primeras derivadas y si los valores de estas funciones en los extremos del segmento $[0, l]$ son iguales a cero. Supongamos que estas condiciones se cumplen. Entonces la serie (10,20) converge absoluta y uniformemente para $0 \leqslant x \leqslant l$

y para todo t, ya que sen $\frac{k\pi}{l}t$ y cos $\frac{k\pi}{l}$ t no son mayores que 1 en valor absoluto. De aquí se deduce que la función $u(t, x)$, definida por la serie (10,20), es continua y satisface la primera condición inicial (2,20) y las condiciones de contorno (3,20). Pero de aquí no se puede aún concluir que esta función satisfaga la segunda condición inicial de (2,20) y la ecuación (1,20). Esto se podría afirmar, si la serie (10,20) se pudiese derivar término a término dos veces respecto a x y dos veces respecto a t. Y como *se sabe, se puede derivar término a término sólo si las series que* se obtienen de la derivación convergen uniformemente en C_T. Esta última condición se cumplirá de antemano para todo T, incluso para $T = \infty$, si la función φ_0 tiene derivadas continuas hasta el cuarto orden inclusive en todo el segmento $[0, l]$, y se anula en los extremos de este segmento al igual que sus derivadas de primer y segundo orden, y si la función φ_1 tiene derivadas continuas hasta el tercer orden inclusive en $[0, l]$, y se anula en los extremos de este segmento al igual que su derivada de primer orden.[55] En este caso

$$A_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right) \text{ y } B_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right).^{56}$$

[55] Estas limitaciones para φ_0 y φ_1 pueden hacerse menos rígidas (véase § 23).

[56] Mediante $O[\varphi(n)]$ designamos una función $\psi(n)$ tal que la razón $\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}$ permanece acotada cuando $n \to \infty$. Estas estimaciones son fáciles de obtener transformando los coeficientes A_k y B_k mediante una integración por partes.

2. En la práctica, al aplicar el método de Fourier, nadie se ocupa generalmente de que la serie (10,20) se puede derivar término a término dos veces respecto a x y a t. Lo más que se exige es que las funciones φ_0 y φ_1 sean continuas, al igual que sus primeras derivadas, y que se anulen en los extremos del segmento $[0, l]$. Esto, como ya hemos visto, garantiza la convergencia absoluta y uniforme de la serie (10,20) en todo el rectángulo C_T. Si para φ_0 y φ_1 dadas en el rectángulo C_T, existe una solución $u(t, x)$ del problema considerado, que es continua al igual que sus derivadas de primer y segundo orden, la sucesión de sumas parciales $S_k(t, x)$ de la serie (10,20) converge uniformemente a la solución en C_T. En efecto, de la teoría de las series trigonométricas se sabe que la serie de Fourier, para toda función de *cuadrado integrable, converge a la función en la media.* Por eso, de la propia construcción de la serie (10,20) se deduce que

$$\int_0^l [S'_{k_x}(0, x) - \varphi'_0(x)]^2\, dx \to 0 \text{ y } \int_0^l [S'_{k_t}(0, x) - \varphi_1(x)]^2\, dx \to 0$$

para $k \to \infty$. Partiendo de la observación 3 al § 19, de aquí se desprende que

$$S_k(t, x) \to u(t, x)$$

uniformemente en $\overline{C}_T$.

3. Cada una de las funciones

$$u_k(t, x) = X_k(x)\, T_k(t) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \left(A_k \cos \frac{k\pi}{l} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \right) =$$
$$= D_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} (t + t_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

describe las llamadas *oscilaciones propias* de una cuerda con extremos fijos. Para oscilaciones propias correspondientes a $k = 1$, la cuerda emite el tono fundamental, el más bajo. Para oscilaciones correspondientes a k mayores, emite tonos más altos, los "sobre tonos". Si la cuerda oscila según la ley

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n} D_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} (t + t_k),$$

emite simultáneamente tonos de distintas alturas, correspondientes a los distintos términos de esta suma.

§ 21. MÉTODO GENERAL DE FOURIER (CONSIDERACIONES PREVIAS)

1. El método de Fourier (llamado también método de separación de variables) para la solución del problema de contorno mixto, es aplicable sólo a una clase especial de ecuaciones lineales de segundo orden, aunque el problema tiene solución para una clase mucho más amplia de ecuaciones.

En el presente epígrafe expondremos el método sin fundamentar rigurosamente los resultados que se obtienen. La fundamentación del método de Fourier será dada en los epígrafes siguientes. La fundamentación rigurosa del método de Fourier fue dada por primera vez por V. A. Stieklov.[57]

Consideremos la ecuación hiperbólica de la forma

$$A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)]\, u = 0, \quad (1{,}21)$$

[57] Los resultados de V. A. Stieklov aparecen en su libro "Problemas fundamentales de la física matemática", Petrograd, 1922.

donde los coeficientes A, C, D, E, F_1, F_2 son funciones suficientemente suaves y $A(t) > a_0 > 0$, $C(x) < c_0 < 0$; aquí a_0 y c_0 son constantes. La suposición de que unos de estos coeficientes dependen sólo de t, otros sólo de x y que el coeficiente de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ es igual a cero, define la clase de ecuaciones hiperbólicas para las cuales el problema mixto de contorno puede ser resuelto por el método de Fourier.

Supongamos que se busca una solución de la ecuación (1,21) dos veces continuamente derivable que satisfaga las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) \tag{2,21}$$

y las condiciones de contorno

$$\left.\begin{aligned} A_0 u(t, 0) + B_0 u'_x(t, 0) &= 0, \\ A_1 u(t, l) + B_1 u'_x(t, l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3,21}$$

donde las constantes A_0, B_0, A_1, B_1 son tales que $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ y $A_l^2 + B_l^2 \neq 0$.

Al igual que en el ejemplo del § 20, buscaremos primero las soluciones no triviales de la ecuación (1,21) que tienen la forma

$$u(t, x) = T(t)\, X(x), \tag{4,21}$$

y exigiremos de estas soluciones que verifiquen las condiciones de contorno (3,21), sin ocuparnos, por el momento, de las condiciones iniciales.

Si tal solución existe, sustituyéndola en (1,21), obtenemos una ecuación que necesariamente deben satisfacer las funciones $X(x)$ y $T(t)$

$$A(t)\,T''\,X + C(x)\,TX'' + D(t)\,T'\,X + E(x)\,TX' + \\ + [F_1(t) + F_2(x)]\,TX = 0.$$

Puesto que la función $X(x)$ no es idénticamente nula, existe un punto x_0 tal que $X(x_0) \neq 0$; para todos los t debe verificarse la igualdad

$$A(t)\,T'' + D(t)\,T' + F_1(t)\,T = \\ = -\frac{C(x_0)\,X''(x_0) + E(x_0)\,X'(x_0) + F_2(x_0)\,X(x_0)}{X(x_0)}\,T = \lambda_1 T,$$

donde λ_1 es una constante. Del mismo modo obtendremos que la función $X(x)$ para todas las x debe satisfacer la ecuación

$$C(x)\,X'' + E(x)\,X' + F_2(x)\,X = \lambda_2 X,$$

donde λ_2 es una constante. Pero en todos los puntos x y t donde $X(x) \neq 0$ y $T(t) \neq 0$ se tiene

$$A(t)\,\frac{T''}{T} + D(t)\,\frac{T'}{T} + F_1(t) = \\ = -\,C(x)\,\frac{X''}{X} - E(x)\,\frac{X'}{X} - F_2(x), \quad (5,21)$$

y por eso $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda$; y obtenemos para las funciones $X(x)$ y $T(t)$ las siguientes ecuaciones:

$$A(t)\,T'' + D(t)\,T' + F_1(t)\,T + \lambda T = 0, \qquad (6,21)$$

$$C(x)\,X'' + E(x)\,X' + F_2(x)\,X - \lambda X = 0. \qquad (7,21)$$

Como $T(t) \neq 0$, para que la función (4,21) satisfaga las condiciones de contorno (3,21) es necesario que se verifiquen las condiciones

$$\left.\begin{aligned} A_0X(0) + B_0X'(0) &= 0, \\ A_1X(l) + B_1X'(l) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8,21}$$

El problema que consiste en encontrar las soluciones no triviales de la ecuación *(7,21)* que satisfagan las condiciones *(8,21)* se llama problema de los ***valores propios***. Este problema no tiene solución distinta del cero idéntico (no trivial) para todo λ. Los valores de λ para los cuales existe una solución no trivial, se llaman ***valores propios*** de este problema y la solución no trivial se llama ***función propia*** correspondiente al valor propio dado. El conjunto de todos los valores propios se llama ***espectro*** del problema dado.

En el epígrafe siguiente se demostrará que los valores propios *de nuestro problema forman una sucesión infinita*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$$

A cada valor propio λ_k corresponde una función propia $X_k(x)$ que, en virtud de la homogeneidad de la ecuación *(7,21)* y de las condiciones (8,21), se determina unívocamente, salvo un factor numérico arbitrario. Escojamos este factor de manera que

$$\int_0^l \rho(x)\, X_k^2(x)\, dx = 1, \tag{9,21}$$

donde $\rho(x) > 0$ es una función fija para la ecuación dada, que será determinada en el siguiente epígrafe.

Seguidamente demostraremos que las funciones propias que corresponden a distintos valores propios *son ortogonales con peso* ρ, es decir, satisfacen las igualdades

$$\int_0^l \rho(x)\, X_k(x)\, X_l(x)\, dx = 0 \text{ para } k \neq l. \tag{10,21}$$

Para cada valor propio λ_k resolvemos la ecuación (6,21). La solución general de la ecuación (6,21) para $\lambda = \lambda_k$ (designémosla por $T_k(t)$) es una combinación lineal arbitraria de cualesquiera dos soluciones parciales linealmente independientes $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$:

$$T_k(t) = C_1 T_k^*(t) + C_2 T_k^{**}(t).$$

Escojamos T_k^* y T_k^{**} de manera que verifiquen las siguientes condiciones iniciales para $t = 0$:

$$\left.\begin{array}{ll} T_k^*(0) = 1; & T_k^{*\prime}(0) = 0; \\ T_k^{**}(0) = 0; & T_k^{**\prime}(0) = 1, \end{array}\right\} \tag{11,21}$$

y pongamos

$$u_k(t, x) = T_k(t) \cdot X_k(x).$$

Las funciones $u_k(t, x)$ satisfacen para cualquier k la ecuación (1,21) y las condiciones de contorno (3,21).

Para satisfacer las condiciones iniciales (2,21) formamos la serie

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\,[A_k T_k^*(t) + B_k T_k^{**}(t)]. \tag{12,21}$$

Si esta serie converge uniformemente al igual que las series obtenidas de su doble derivación, término a término, respecto a t y x, entonces su suma, evidentemente, satisfará la ecuación (1,21) y las condiciones de contorno (3,21). Para que se cumplan las condiciones iniciales (2,21) es necesario que

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi_0(x), \tag{13,21}$$

$$u'_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k X_k(x) = \varphi_1(x). \tag{14,21}$$

Suponiendo que las series (13,21) y (14,21) convergen uniformemente, podemos determinar los coeficientes A_m, B_m multiplicando ambos miembros de las igualdades (13,21) y (14,21) por $\rho X_m(x)$ e integrando respecto a x en el intervalo de 0 a l. En virtud de (9,21) y (10,21), obtendremos

$$A_m = \int_0^l \rho(x)\,\varphi_0(x)\,X_m(x)\,dx,$$

$$B_m = \int_0^l \rho(x)\,\varphi_1(x)\,X_m(x)\,dx.$$

Sustituyendo estos valores de los coeficientes en la serie (12,21) obtendremos, evidentemente, la solución de nuestro problema siempre que la serie (12,21) y las series, obtenidas de su derivación término a término respecto a x y a t, hasta dos veces inclusive, converjan uniformemente.

Observación. Hemos indicado el esquema general de la aplicación del método de Fourier para resolver el problema mixto para la ecuación (1,21); este esquema es aplicable también en el caso de muchas variables espaciales, para ecuaciones hiperbólicas de tipo especial (véase § 25).

§ 22. PROPIEDADES GENERALES DE LAS FUNCIONES PROPIAS Y DE LOS VALORES PROPIOS

1. Para estudiar las propiedades de las funciones propias y de los valores propios demostraremos primeramente que la ecuación (7,21)

$$C(x)\, X''(x) + E(x)\, X'(x) + F_2(x)\, X(x) - \lambda X(x) = 0$$

del epígrafe anterior se puede reducir a la forma

$$[p(x)\, X'(x)]' - q(x)\, X(x) + \lambda \rho(x)\, X(x) = 0, \quad (1,22)$$

multiplicándola por una función de x escogida adecuadamente.

En todo lo que sigue supondremos que $C(x) < c_0 < 0$, donde c_0 es una constante. Multiplicando (7,21) por $\rho(x)$, obtendremos

$$\rho C X'' + \rho E X' + \rho F_2 X - \lambda \rho X = 0.$$

Para poder escribir los primeros dos términos en la forma

$$[p(x) X']',$$

debe cumplirse que

$$(\rho C)' = \rho E.$$

Hallando $\rho(x)$ en esta ecuación diferencial, obtendremos

$$\rho(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{g - c'}{c} dx} > 0$$

(hemos tomado una solución parcial de la ecuación diferencial para $\rho(x)$). Introduciendo ahora las denotaciones

$$\rho C = -p \text{ y } \rho F_2 = q,$$

podemos plantear nuestra ecuación en la forma (1,22). A partir de las suposiciones hechas se deduce que $p(x) > p_0$, $\rho(x) > \rho_0$, donde p_0 y ρ_0 son constantes positivas.

Supondremos que $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $\rho(x)$ son continuas para $0 \leqslant x \leqslant l$.

2. De modo que vamos a considerar el problema de los valores propios, es decir, buscaremos una solución no trivial de la ecuación (1,22) que satisfaga las condiciones

$$\left.\begin{aligned} A_0 X(0) + B_0 X'(0) &= 0, \\ A_1 X(l) + B_1 X'(l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2,22}$$

donde $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$ y $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$.

Teorema 1. *Si $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son funciones propias correspondientes a un mismo valor λ, $X_1(x) = cX_2(x)$, donde c es una constante.*

En efecto, como $X_1(x)$ y $X_2(x)$, por suposición, satisfacen las condiciones

$$A_0 X_1(0) + B_0 X_1'(0) = 0,$$

$$A_0 X_2(0) + B_0 X_2'(0) = 0$$

y $A_0^2 + B_0^2 \neq 0$, el determinante de Wronski

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_1' & X_2' \end{vmatrix}$$

de las soluciones X_1 y X_2 de la ecuación (1,22) se anula en el punto $x = 0$ y, por lo tanto, las funciones $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son linealmente dependientes.

En lo sucesivo supondremos que las funciones propias están normalizadas con peso ρ, es decir, han sido escogidas de manera que

$$\int_0^l \rho(x)\,[X(x)]^2\,dx = 1. \tag{3,22}$$

Una función $X(x)$ con esta propiedad se puede obtener multiplicando una función arbitraria propia $\widetilde{X}(x)$ por el número

$$\frac{1}{\sqrt{\int_0^l \rho(x)\,[\widetilde{X}(x)]^2\,dx}}$$

Es evidente que para un valor propio dado la función propia normalizada se determina unívocamente, salvo el signo.

Teorema 2. Las funciones propias correspondientes a distintos valores propios son ortogonales con peso $\rho(x)$, es decir, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $X_i(x)$ es la función propia correspondiente al valor propio λ_i $(i = 1, 2)$, entonces

$$\int_0^l \rho(x)\,X_1(x)\,X_2(x)\,dx = 0. \tag{4,22}$$

Demostración. Escribamos las identidades

$$(pX_1')' - qX_1 + \lambda_1 \rho X_1 = 0,$$

$$(pX_2')' - qX_2 + \lambda_2 \rho X_2 = 0.$$

Multipliquemos la primera por X_2, la segunda por X_1 y restemos una de otra. Obtendremos la identidad

$$[pX_1']' X_2 - [pX_2']' X_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\, \rho X_1 X_2 = 0.$$

Integrando esta identidad entre 0 y l, obtendremos (mediante la integración por partes)

$$\int_0^l (\lambda_2 - \lambda_1)\, \rho X_1 X_2\, dx =$$

$$= pX_1' X_2 \Big|_0^l - pX_2' X_1 \Big|_0^l - \int_0^l pX_1' X_2'\, dx + \int_0^l pX_2' X_1'\, dx.$$

El miembro derecho de esta igualdad es igual a cero, ya que los dos últimos sumandos se cancelan, mientras que

$$p(l)\, [X_1'(l)\, X_2(l) - X_2'(l)\, X_1(l)] = 0$$

y

$$p(0)\, [X_1'(0)\, X_2(0) - X_2'(0)\, X_1(0)] = 0$$

en virtud de las condiciones (2,22). Por eso

$$\int_0^l \rho X_1 X_2\, dx = 0,$$

ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3. Para hacer más sencilla la exposición ulterior nos limitaremos a considerar las condiciones de contorno

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{5,22}$$

El problema de los valores propios será reducido en este epígrafe al problema de encontrar un extremo condicionado (mínimo) de una funcional. La funcional se escoge de manera que la ecuación (1,22) sea para la misma la ecuación de Lagrange-Euler.[58]

Consideremos dos funcionales cuadráticas de la función $X(x)$

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx,$$

$$H(X) = \int_0^l \rho X^2\, dx.$$

Las funcionales

$$D(X_1, X_2) = \int_0^l (pX_1'X_2' + qX_1X_2)\, dx,$$

$$H(X_1, X_2) = \int_0^l \rho X_1 X_2\, dx$$

se llaman *funcionales bilineales* correspondientes a las funcionales cuadráticas dadas. Y aquí se cumple el siguiente teorema.

[58] Véase M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Curso de cálculo de variaciones, segunda edición, Gostiejizdat, 1950.

Teorema 3. *Si λ es un valor propio del problema considerado de valores propios, y X_λ es la función propia normalizada correspondiente, para cualquier función $f(x)$ que tiene derivada continua y verifica las condiciones* (5,22) *se tiene*

$$D(X_\lambda, f) = \lambda \int_0^l \rho X_\lambda f\, dx = \lambda H(X_\lambda, f).$$

Demostración. Al integrar por partes, empleando las condiciones (5,22) para la función f y la ecuación (1,22), obtendremos

$$D(X_\lambda, f) = \int_0^l (pX'_\lambda f' + qX_\lambda f)\, dx =$$

$$= pX'_\lambda f\Big|_0^l - \int_0^l [(pX'_\lambda)' - qX_\lambda] f\, dx = \lambda \int_0^l \rho X_\lambda f\, dx =$$

$$= \lambda H(X_\lambda, f).$$

Corolario. Sea $X_i(x)$ la función propia que corresponde al valor propio λ_i. Entonces

$$D(X_i) = \lambda_i, \quad D(X_i, X_j) = 0, \text{ para } i \neq j.$$

Teorema 4. *La razón* $\dfrac{D(X)}{H(X)}$ (*para* $X \not\equiv 0$) *está acotada inferiormente y, por lo tanto, tiene cota inferior máxima.*

En efecto,

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx \geqslant \int_0^l qX^2\, dx =$$

$$= \int_0^l \frac{q}{\rho}\, \rho X^2\, dx \geqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} \frac{q(x)}{\rho(x)}\, H(X).$$

Si consideramos las funciones que satisfacen la condición $H(X) = 1$, para éstas estarán acotados inferiormente los valores de la propia funcional $D(X)$. Y como todo valor propio $\lambda = D(X_\lambda)$, si $H(X_\lambda) = 1$, obtenemos de aquí un corolario importante. *Los valores propios de nuestro problema están acotados inferiormente.*

Consideremos el problema de encontrar el mínimo de la funcional $D(X)$ con la condición $H(X) = 1$. La clase de funciones admisibles será el conjunto de funciones $X(x)$ con dos derivadas continuas definidas en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ que verifican las condiciones (5,22). *Supongamos que este mínimo se alcanza en la clase de funciones admisibles.*[59] Entonces la función que lo

[59] La demostración de existencia de la solución de este problema, así como de todos los otros problemas variacionales sobre los cuales trataremos en este capítulo, véase en el apéndice de I. M. Gelfand y G. A. Sujomlínov al libro de M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik "Fundamentos del cálculo de variaciones", t. 1, parte 2, (1935).

En el cálculo de variaciones se demuestra que si exigiésemos de las funciones admisibles la existencia de derivadas continuas de primer orden solamente, el problema variacional tendría solución de todos modos. Su solución tendría obligatoriamente derivadas continuas de segundo orden y por eso sería igual a la solución de ese mismo problema en la clase de funciones con dos derivadas continuas.

suministra debe, como se sabe del curso del cálculo de variaciones, *satisfacer para cierto* λ *la ecuación de Lagrange-Euler para la funcional*

$$D(X) - \lambda H(X) = \int_0^l [pX'^2 + qX^2 - \lambda\rho X^2]\, dx =$$

$$= \int_0^l F(x, X, X')\, dx,$$

es decir, la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial X'} = 0,$$

que en nuestro caso es igual a la ecuación (1,22). Las condiciones de contorno del problema de los valores propios y del problema variacional considerado también son iguales. Por eso la función $X_1(x)$ que suministra el extremo de $D(X)$ bajo la condición $H(X) = 1$, es una función propia del problema inicial de los valores propios. Pero como siempre $D(X_\lambda) = \lambda$, en virtud del teorema 3, es evidente que el valor propio al cual corresponde $X_1(x)$ debe ser el menor. Designémoslo por λ_1.

Demostremos que la función $X(x)$ que suministra el mínimo de la funcional $D(X)$ en la clase de funciones admisibles que satisfacen las condiciones anteriores y además la condición complementaria

$$\int_0^l \rho X_1 X\, dx = 0,$$

es una función propia correspondiente al segundo —en valor— valor propio.

En efecto, la función que suministra el mínimo indicado debe satisfacer la ecuación de Lagrange-Euler para la funcional

$$D(X) - \lambda H(X) - \mu \int_0^l \rho X_1 \, X \, dx,$$

que en el caso dado puede escribirse en la forma

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X + \frac{1}{2} \mu\rho X_1 = 0; \qquad (6,22)$$

λ y μ son ciertas constantes.

Demostremos que $\mu = 0$. Para ello escribamos la ecuación (1,22) sustituyendo λ por λ_1 y X por X_1:

$$(pX_1')' - qX_1 + \lambda_1\rho X_1 = 0. \qquad (7,22)$$

Multipliquemos (6,22) por X_1, (7,22) por X, restemos uno del otro e integremos entre 0 y l. Repitiendo la integración por partes, realizada al demostrar la ortogonalidad, y basándonos en que

$\int_0^l \rho X_1 X \, dx = 0$. obtendremos

$$\mu \int_0^l \rho X_1^2 \, dx = 0,$$

de donde se deduce que

$$\mu = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (6,22) tiene la forma

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0,$$

y X es una función propia. Designémosla por $X_2(x)$. Demostremos que el valor propio λ_2 que corresponde a esta función es el valor propio más cercano a λ_1. Evidentemente $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, ya que al aumentar el número de condiciones que se exigen de las funciones admisibles, el mínimo de $D(X)$ puede solamente crecer. El valor λ_2 no puede ser igual a λ_1, ya que si lo fuera $X_2(x)$, en virtud del teorema 1, sería igual a $\pm X_1(x)$ lo que contradice la condición $\int_0^l X_1 X\, dx = 0$. Por lo tanto, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Demostremos que entre λ_2 y λ_1 no hay otros valores propios. En efecto, si existiese una terna de valores propios $\lambda_2 > \widetilde{\lambda} > \lambda_1$, correspondientes a las funciones propias X_2, $\widetilde{X}$, X_1, es fácil ver que no sería la función X_2 sino la función $\widetilde{X}$ la que suministraría el mínimo del problema variacional que acabamos de considerar, de acuerdo con el corolario del teorema 3.

De modo totalmente análogo se demuestra que la función $X_n(x)$ que suministra el mínimo de $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas que satisfacen las condiciones (5,22) y las condiciones

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X\, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

donde $X_j(x)$ que es la función propia j-ésima, es la función propia que corresponde al valor propio n-ésimo en valor.

Por lo tanto, queda dado un método para hallar sucesivamente los valores propios y las funciones propias. Como se demostrará en lo sucesivo $\lambda_n \to \infty$ para $n \to \infty$ y, por consiguiente, de ese modo pueden hallarse todos los números propios y las funciones propias.

4. Se puede señalar un método que permite buscar directamente el valor propio n-ésimo y la función propia n-ésima sin tener que calcular previamente las funciones propias anteriores. Expondremos el método mediante el siguiente teorema.

Teorema de Courant:

Sea $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$ un sistema arbitrario de funciones continuas en el segmento $[0, l]$. Designemos por $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ el mínimo de la funcional $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas que se anulan en los extremos del segmento y que satisfacen las siguientes condiciones complementarias

$$H(X) = 1, \tag{8,22}$$

$$\int_0^l \rho\varphi_i X \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9,22}$$

Entonces el n-ésimo valor propio λ_n del problema de los valores propios considerado más arriba es igual a la cota superior de los valores de $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ para cualesquiera funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Demostración. De acuerdo con lo anterior

$$\lambda(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \lambda_n,$$

y por eso es suficiente demostrar que para cualquier selección de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n.$$

Demostremos que para un sistema arbitrario $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ se puede indicar una función admisible $\widetilde{X}(x)$ que satisface las condiciones (5,22), (8,22) y (9,22) y tal que

$$D(\widetilde{X}) \leqslant \lambda_n .$$

De aquí se desprende que

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda_n$$

y el teorema queda demostrado.

La función $\widetilde{X}(x)$ la podemos buscar en la forma

$$\widetilde{X}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(x) .$$

Es evidente que esta función cualesquiera que sean c_k se anula en $x = 0$ y $x = l$ y tiene derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Escojamos los coeficientes c_k de manera que se cumplan las condiciones (8,22) y (9,22). Sustituyendo $\widetilde{X}$ en (8,22) y basándonos en que $H(X_i, X_k) = 0$ para $i \neq k$ (propiedad de ortogonalidad de las funciones propias), obtenemos

$$H(\widetilde{X}) = \int_0^l \rho \widetilde{X}^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 1. \qquad (10,22)$$

Las condiciones (9,22) dan el sistema de ecuaciones

$$\int_0^l \rho\varphi_i \widetilde{X} \, dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^l \rho\varphi_i X_k \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

que es un sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales con n incógnitas c_k que tendrá siempre soluciones no triviales. Normalizando una de estas soluciones mediante (10,22), escogemos la función $\widetilde{X}(x)$. Hallemos $D(\widetilde{X})$:

$$D(\widetilde{X}) = \int_0^l \Big[p\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X'_k \Big)^2 + q \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k \Big)^2 \Big] dx =$$

$$= \int_0^l \Big(p \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_k c_l X'_k X'_l + q \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_k c_l X_k X_l \Big) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(X_k) + \sum_{k \neq 1} c_k c_l D(X_k, X_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(X_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \lambda_k \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \text{ [60]} = \lambda_n,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observación. En lugar de buscar el mínimo de la funcional $D(X)$ con las condiciones (8,22) y (9,22) se puede buscar el mínimo de la relación $\dfrac{D(X)}{H(X)}$ con las condiciones (9,22). El valor mínimo será el mismo; pero en el segundo caso la función extremante será determinada con exactitud que excluye un factor constante.

---

[60] Ya que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda n$.

5. Para la investigación ulterior de los valores propios y de las funciones propias, nos será útil conocer cómo varían los valores propios al variar los coeficientes de la ecuación (1,22) y al variar el segmento sobre el cual se consideran las soluciones.

a) *Al variar los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ en un sentido determinado, los valores propios varían en el mismo sentido.* Más exactamente, si tenemos dos ecuaciones

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$(p^*X')' - q^*X + \lambda\rho X = 0,$$

siendo

$$p(x) \leqslant p^*(x), \quad q(x) \leqslant q^*(x),$$

entonces $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$ donde λ_n y λ_n^* son, respectivamente, los n-ésimos valores propios de la primera y la segunda ecuación.

La demostración se deduce de que

$$D(X) = \int_0^l (pX'^2 + qX^2)dx \leqslant \int_0^l (p^*X'^2 + q^*X^2)dx = D^*(X).$$

Por eso $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \leqslant \lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, ya que la clase de funciones admisibles $X(x)$ no varió y por lo tanto $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$.

b) *Al variar el coeficiente $\rho(x)$ en un sentido determinado, los valores propios varían en el sentido opuesto.*

Supongamos que $\rho(x) \leqslant \rho^*(x)$ y que el resto de los coeficientes de la ecuación no han variado. Entonces para toda función $X(x)$

$$D(X) = D^*(X), \text{ y } H(X) \leqslant H^*(X).$$

Por eso

$$\frac{D(X)}{H(X)} \geqslant \frac{D^*(X)}{H^*(X)}. \tag{11,22}$$

Toda función $X(x)$ que satisfaga las condiciones (9,22) para ciertas $\varphi_i(x)$, satisfará las condiciones análogas

$$\int_0^l \rho^*(x)\varphi_i^*(x)\, X(x)\, dx = 0,$$

si se toma

$$\varphi_i^*(x) = \frac{\rho(x)}{\rho^*(x)}\, \varphi_i(x).$$

De aquí y de la desigualdad (11,22) concluimos que

$$\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant \lambda^* (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_{n-1}^*).$$

Y como que $\rho^*(x) \geqslant \rho(x) > \rho_0 > 0$, el conjunto de todas las $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ coincide con el conjunto de todas las $(\varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_n^*(x))$ y por eso $\lambda_n \geqslant \lambda_n^*$.

c) *Al disminuir el segmento* $[0, l]$ *los valores propios no decrecen.* Más exactamente, si en el problema considerado de los valores sustituimos el segmento $[0, l]$ por el segmento $[0, l^*]$ donde $l^* < l$ y designamos los valores propios del nuevo problema mediante λ^*, entonces $\lambda_n^* \geqslant \lambda_n$.

En efecto, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$, que juega el papel de $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ en el nuevo problema, coincidirá con el mínimo de la funcional $D(X)$ definida para el segmento $[0, l]$, si además de las condiciones (8,22) y (9,22) imponemos a la clase de funciones admisibles que $X(x) \equiv 0$ para $l^* \leqslant x \leqslant l$. Pero al imponer nuevas condiciones la clase de funciones admisibles decrece, y el mínimo de la funcional puede sólo aumentar.[61]

Por lo tanto, $\lambda^*(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \geqslant \lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Y por eso $\lambda_n^* \geqslant \lambda_n$.

Refiriéndonos al ejemplo concreto considerado en el § 20, podemos deducir de aquí la relación conocida entre la longitud de una cuerda y la altura de su tono principal: mientras más corta es la cuerda mayor es la frecuencia de sus vibraciones propias (que es igual a $\frac{k\pi}{l}$) y más alto será el sonido producido.

6. Exactamente con el mismo método que hemos empleado para estudiar los valores propios de la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{5,22}$$

se pueden estudiar los valores propios de la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \tag{12,22}$$

o con las condiciones de contorno

$$X'(0) - \sigma_0 X(0) = 0, \quad X'(l) + \sigma_1 X(l) = 0, \tag{13,22}$$

---

[61] Si exigimos de las funciones $X(x)$, continuas en $[0, l]$ al igual que sus primeras dos derivadas, que se anulen para $l^* \leqslant x \leqslant l$, con ello estamos exigiendo que en $x = l^*$ se anule no sólo la propia función $X(x)$, sino también sus primeras dos derivadas. Sin embargo, se puede demostrar que esta exigencia complementaria no varía el mínimo de $D(X)$ en el segmento $[0, l^*]$.

donde $\sigma_0 \geqslant 0$ y $\sigma_l \geqslant 0$; o bien imponiendo en un extremo del intervalo $(0, l)$ una de las anteriores condiciones de contorno y en el otro extremo la otra.

A continuación exponemos el teorema fundamental que permite la investigación de los valores propios con las condiciones de contorno (13,22) y que es análogo al teorema del subepígrafe **4**:

Sea $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ *un sistema arbitrario de funciones continuas en el segmento* $[0, l]$. *Designemos por* $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *el mínimo de la funcional*

$$\int_0^l (pX'^2 + qX^2)\, dx + \sigma_0 p(0)\, X^2(0) + \sigma_l p(l)\, X^2(l) \qquad (14{,}22)$$

en la clase de funciones con dos derivadas continuas que satisface las siguientes condiciones

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho\varphi_i X\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (15{,}22)$$

Entonces el n-ésimo valor propio λ_n *del problema considerado de los valores propios es igual a la cota superior de los valores de* $\lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *para cualesquiera funciones* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ *siempre que éstas sean continuas.*

Valiéndonos de este teorema podemos, como en el caso de extremos fijos, estudiar cómo dependen los valores propios de $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, σ_0, σ_l, l.

Si tomamos como funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ las primeras $n-1$ funciones propias $X_1, \ldots, X_{n-1}$ del problema considerado, entonces la función que suministra el mínimo de la funcional (14,22) con las condiciones (15,22) es la n-ésima función propia de este problema, y el mínimo de la funcional es su n-ésimo valor propio.

Si $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_l = 0$, tenemos el problema de los valores propios para la ecuación (1,22) con las condiciones de contorno (12,22). En este caso la n-ésima función propia suministrará el mínimo de $D(X)$ en la clase de funciones con dos derivadas continuas *que satisfacen las mismas condiciones*

$$H(X) = 1, \quad \int_0^l \rho X_j X \, dx = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

donde $X_1, \ldots, X_{n-1}$ son las primeras funciones propias de este problema, al igual que en el caso de los extremos fijos. Pero ahora no se exige de las funciones admisibles que verifiquen cierta condición en los extremos del intervalo $(0, l)$. La función que soluciona este problema variacional satisface automáticamente las condiciones (12,22). Este es el "problema libre". Corresponde a vibraciones de una cuerda libre, es decir, cuyos extremos no se han fijado. Recordemos, sin embargo, que cuando decimos que una cuerda *no* está fija en los extremos, queremos decir, solamente, que sus extremos pueden moverse arbitrariamente sobre la *recta perpendicular* a la *posición de equilibrio* de la cuerda, pero de ningún modo que los extremos puedan acercarse a lo largo de la *posición de equilibrio*.

Si de las funciones admisibles no se exige la continuidad en ningún punto interior c del intervalo $(0, l)$, la clase de funciones admisibles aumenta; $\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ y, por lo tanto, también λ_n, sólo pueden disminuir. El tono correspondiente, emitido por la cuerda, bajará. Esto corresponde a una rotura de la cuerda en un punto interior c. Entonces los extremos de ambas partes de la cuerda, permaneciendo sobre la misma recta perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda, pueden moverse libremente por esa recta. La función propia correspondiente X_n tendrá en el punto c una discontinuidad de primer tipo; además tendremos

$$X'_n(c + 0) = 0 \text{ y } X'_n(c - 0) = 0.$$

De lo anterior se deduce que los tonos de la cuerda en este caso bajarán en comparación con los tonos respectivos de la cuerda entera.

7. Nos limitaremos de nuevo a considerar las condiciones de contorno de la forma (5,22), ya que en los otros casos se pueden aplicar razonamientos completamente análogos.

Hagamos un estimado de λ_n respecto a n. Designemos los máximos de las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $\rho(x)$ en el segmento $[0, l]$ mediante p_{max}, q_{max}, y ρ_{max}, respectivamente, y los mínimos, mediante p_{min}, q_{min} y ρ_{min} y consideremos además de la ecuación (1,22) *dos ecuaciones con coeficientes constantes*

$$p_{max}X'' - q_{max}X + \lambda\rho_{min}X = 0, \tag{16,22}$$

$$p_{min}X'' - q_{min}X + \lambda\rho_{max}X = 0. \tag{17,22}$$

De los resultados del subepígrafe 5 se deduce que

$$\underline{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \overline{\lambda}_n, \tag{18,22}$$

donde $\overline{\lambda}_n$ y $\underline{\lambda}_n$ son, respectivamente, los n-ésimos valores propios de las ecuaciones (16,22) y (17,22). Pero las ecuaciones (16,22) y (17,22) se integran en forma finita y los valores $\overline{\lambda}_n$ y $\underline{\lambda}_n$ pueden ser calculados exactamente. Resolviendo, por ejemplo, (16,22) y encontrando una solución parcial de esta ecuación a partir de las condiciones $X(0) = X(l) = 0$, obtendremos

$$\frac{\overline{\lambda}_n\rho_{min} - q_{max}}{p_{max}} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

De aquí $\overline{\lambda}_n = C_1 n^2 + C_2$, donde C_1 y C_2 no dependen de n. Análogamente

$$\underline{\lambda}_n = c_1 n^2 + c_2.$$

Sustituyendo estos valores en (18,22), obtendremos

$$c_1 n^2 + c_2 \leqslant \lambda_n \leqslant C_1 n^2 + C_2. \tag{19,22}$$

De aquí se deduce, en particular, que los valores propios crecen ilimitadamente cuando $n \to \infty$.

8. Estudiemos ahora el comportamiento de las funciones propias cuando n crece. Para ello simplifiquemos la ecuación (1,22) mediante la sustitución

$$s = \int_0^x \varphi(x)\, dx, \quad u = \frac{1}{\psi(x)} X. \tag{20,22}$$

Busquemos las funciones $\varphi(x) > 0$ y $\psi(x) > 0$ de manera que la ecuación (1,22) después de la sustitución (20,22) se convierta en la ecuación

$$u''(s) + \lambda u = R(s) u. \tag{21,22}$$

Realizando la sustitución (20,22) para las funciones arbitrarias $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, pasaremos de la ecuación (1,22) a la ecuación

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{(\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p}{\varphi^2\psi p}\frac{du}{ds} + \lambda\rho\frac{1}{\varphi^2 p} u = \frac{\psi q - (\psi' p)'}{\varphi^2\psi p} u.$$

Escojamos ahora las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ de manera que esta ecuación tenga la forma (21,22). Para ello es necesario determinar las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ a partir del sistema de ecuaciones

$$\frac{\rho}{\varphi^2 p} = 1, \quad (\varphi\psi p)' + \varphi\psi' p = 0.$$

Resolviendo este sistema, obtendremos

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho}{p}}, \quad \psi = \frac{c}{\sqrt[4]{\rho p}},$$

donde c es una constante arbitraria.

Por eso mediante, por ejemplo, la sustitución

$$s = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}}\, dx, \quad u = \sqrt[4]{\rho p}\, X \tag{22,22}$$

podemos obtener la ecuación (21,22); $R(s)$ es aquí una función continua, si $\rho''(x)$ y $p''(x)$ son continuas, ya que $\varphi^2\psi p \neq 0$.

La solución de la ecuación (21,22) la debemos buscar en el intervalo $0 \leqslant s < l_1$, donde $l_1 = \int_0^l \sqrt{\frac{\rho}{p}}\, dx$. Las condiciones de contorno para $u(s)$, como es fácil ver, serán las mismas que para $X(x)$:

$$u(0) = 0, \quad u(l_1) = 0.$$

Si $X_n(x)$ es una función propia de la ecuación (1,22) que corresponde al valor propio λ_n, a este mismo valor propio le corresponde la función propia u_n de la ecuación (21,22).

Si

$$\int_0^l \rho X_n^2 dx = 1,$$

se comprueba fácilmente que

$$\int_0^{l_1} u_n^2(s) ds = 1. \tag{23,22}$$

Demos las fórmulas asintóticas para $u_n(s)$, cuando $n \to \infty$. Como nos interesa el comportamiento de $u_n(s)$ para n grandes, podemos considerar, basándonos en (19,22), solamente valores positivos de λ_n. Consideremos la ecuación no homogénea respecto a la función $z(s)$

$$z'' + \lambda z = R(s)u, \quad \lambda > 0, \tag{24,22}$$

donde $u(s)$ es la solución de la ecuación (21,22) para el mismo λ. La ecuación (24,22) tiene la solución general

$$z(s) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, s + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, s + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s R(\tau)\, u\,(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\ (s - \tau)\, d\tau. \text{[62]}$$

Si ponemos $C_1 = u(0)$ y $C_2 = \dfrac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}}$; $z(s)$ satisfará para $s = 0$ las mismas condiciones iniciales que $u(s)$. Por eso, en virtud del teorema de la unicidad de la solución del problema de Cauchy para la ecuación (24,22), $z(s)$ será idéntica a $u(s)$ y obtendremos para $u(s)$ la ecuación integral

$$u(s) = u(0) \cos \sqrt{\lambda}\, s + \frac{u'(0)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, s + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s R(\tau)\, u\,(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\ (s - \tau)\, d\tau. \tag{25,22}$$

---

[62] Véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias", Gostiejizdat, 1952, pág. 156.

Supongamos ahora que λ coincide con el n-ésimo valor propio, y que $v_n(s)$ es la solución de la ecuación (21,22) para $\lambda = \lambda_n$ que satisface las condiciones iniciales

$$v_n(0) = 0; \quad v_n'(0) = \sqrt{\lambda_n}.$$

Esta función $v_n(s)$ satisfará la ecuación integral

$$v_n(s) =$$

$$= \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, s + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\,(s-\tau)\, d\tau \tag{26,22}$$

y diferirá, a lo sumo en el signo, de la función propia normalizada $u_n(s)$:

$$u_n(s) = \frac{v_n(s)}{\sqrt{\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds}} = N_n v_n.$$

En lo que sigue demostraremos que

$$N_n \to \sqrt{\frac{2}{l_1}}.$$

Demostremos, primeramente, que todas las funciones $v_n(s)$ están acotadas por una constante que no depende de n. Para esto designemos max $|v_n(s)|$ para $0 \leqslant s \leqslant l$ mediante M_n. Entonces de la ecuación (26,22) tenemos

$$|v_n(s)| \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} M_n \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau$$

y, por lo tanto,

$$M_n \leqslant 1 + \frac{M_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau,$$

$$M_n \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{l_1} |R(\tau)|\, d\tau} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right). \tag{27,22}$$

Como $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$ (véase subepígrafe 7), esta desigualdad demuestra que las funciones $v_n(s)$ están acotadas.

Para lo que sigue debemos estimar de forma análoga las derivadas de primer y segundo orden de las funciones propias. Para ello, derivemos la ecuación integral

$$v_n'(s) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, s + \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \cos \sqrt{\lambda_n}\,(s - \tau)\, d\tau,$$

$$v_n''(s) = -\lambda_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, s -$$
$$- \sqrt{\lambda_n} \int_0^s R(\tau)\, v_n(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\,(s - \tau)\, d\tau +$$
$$+ R(s)\, v_n(s),$$

de donde

$$|v_n'(s)| \leqslant \sqrt{\lambda_n} + O(1), \quad |v_n''(s)| \leqslant \lambda_n + O(\sqrt{\lambda_n}). \tag{28,22}$$

Calculemos ahora $\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds$, es decir, hallemos el factor en el cual las funciones $v_n(s)$ (y, por lo tanto, sus derivadas) difieren de las funciones propias normalizadas $u_n(s)$ (y de sus derivadas respectivas). De (26,22) tenemos

$$v_n^2(s) = \operatorname{sen}^2 \sqrt{\lambda_n}\, s + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right).$$

De aquí

$$\int_0^{l_1} v_n^2(s)\, ds = \frac{l_1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}\, l_1}{4\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) =$$

$$= \frac{l_1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

y de aquí obtenemos directamente para $u_n(s)$ los estimados análogos a (27,22) y (28,22)

$$\left.\begin{aligned} |u_n(s)| &\leqslant \sqrt{\frac{2}{l_1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \\ |u_n'(s)| &\leqslant \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(1), \\ |u_n''(s)| &\leqslant \lambda_n \sqrt{\frac{2}{l_1}} + O(\sqrt{\lambda_n}). \end{aligned}\right\} \quad (29{,}22)$$

Mediante un cambio de variables según las fórmulas (22,22), se obtienen directamente los resultados correspondientes para $X_n(x)$: la acotación de las funciones propias y el mismo orden de crecimiento de las derivadas, cuando $n \to \infty$, que tiene $u_n(s)$.

9. Consideremos el problema del desarrollo de una función continua arbitraria $f(x)$, definida en $0 \leqslant x \leqslant l$, en la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) \tag{30,22}$$

respecto a las funciones propias $X_1(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ de la ecuación (1,22). Del mismo modo que se hace para las series trigonométricas corrientes, es fácil demostrar que si la serie (30,22) *converge uniformemente a la función* $f(x)$, los coeficientes c_n son iguales a los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ respecto al sistema de funciones $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, es decir,

$$c_n = \int_0^l \rho(x) f(x) X_n(x)\, dx \tag{31,22}$$

(véase el final del § 21).

Hagamos corresponder ahora a cada función integrable $f(x)$ su "serie de Fourier" de la forma (30,22), donde los coeficientes c_n están determinados por la fórmula (31,22) y estudiemos la convergencia de esta serie.

Demostremos primero *que para toda función $f(x)$ seccionalmente continua*[63] *y de cuadrado integrable en el segmento* $[0, l]$, *la serie* (30,22) *converge a esta función "en la media"*, es decir, que

$$\int_0^l \rho(x) \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right]^2 dx \to 0$$

$$(N \to \infty).$$

[63] Es decir, que tiene un número finito de puntos de discontinuidad.

Un sistema de funciones ortogonales con cierto peso $\rho(x)$ que tenga la propiedad señalada se llama *completo.*

Para demostrar la afirmación enunciada supongamos primero que $f(x)$ *es una función continuamente derivable que satisface las condiciones* $f(0) = f(l) = 0$. Introduzcamos las denotaciones:

$$f_N(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x), \quad \delta_N^2 = \int_0^l \rho\,(x)\, f_N^2(x)\, dx,$$

$$\varphi_N(x) = \frac{f_N(x)}{\delta_N}.$$

Tenemos que demostrar que $\delta_N^2 \to 0$ cuando $N \to \infty$. Como que

$$\int_0^l \rho\, \varphi_N^2(x)\, dx = 1$$

y como además

$$\int_0^l \rho\, \varphi_N(x)\, X_n\,(x)\, dx = 0 \quad (n = 1, \ldots, N),$$

$\varphi_N(x)$ es una de las funciones admisibles del problema variacional considerado en el subepígrafe 3 de este epígrafe.[64] El valor del mínimo de $D(X)$ para este problema es λ_{N+1}, por lo tanto,

$$D(\varphi_N) \geqslant \lambda_{N+1}.$$

[64] Véase la observación de las pp. 172 - 173.

Calculemos ahora $D(\varphi_N)$. Empleando las denotaciones del 3, hallaremos

$$D(\varphi_N) = \int_0^l (p\varphi_N'^2 + q\varphi_N^2)\,dx = \frac{1}{\delta_N^2}\int_0^l (pf_N'^2 + qf_N^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\delta_N^2}\int_0^l \Big[p\Big(f' - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n'\Big)^2 + q\Big(f - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n\Big)^2\Big]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\delta_N^2}\Big[D(f) - 2\sum_{n=1}^{N} c_n D(f, X_n) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_n c_m D(X_n, X_m)\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_{N+1}. \qquad (32,22)$$

Sobre la base del teorema 3 del subepígrafe 3, tenemos

$$D(f, X_n) = \lambda_n c_n, \quad D(X_n, X_n) = D(X_n) = \lambda_n,$$
$$D(X_m, X_n) = 0 \text{ para } n \neq m.$$

Sustituyendo los valores de las funcionales hallados en (32,22), obtendremos

$$\frac{1}{\delta_N^2}\Big[D(f) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n^2\Big] \geqslant \lambda_{N+1},$$

de donde

$$\delta_N^2 \leqslant \frac{D(f) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n^2}{\lambda_{N+1}}. \qquad (33,22)$$

De acuerdo con (19,22) existe sólo un número finito de λ_n negativos. Por eso el numerador del miembro derecho de (33,22) está acotado para todos los N. Como $\lambda_{N+1} \to \infty$ cuando $N \to \infty$, se deduce que $\delta_N^2 \to 0$ si $N \to \infty$, es decir, que la serie (30,22) converge en la media para toda función derivable que se anula en los puntos $x = 0$ y $x = l$.

Para liberarnos de las limitaciones impuestas a $f(x)$ observemos que para toda función seccionalmente continua $f(x)$ de cuadrado integrable existe una función $f^*(x)$ con derivadas continuas que se anula en los extremos del segmento $[0, l]$ y tal que

$$\int_0^l \rho\, [f(x) - f^*(x)]^2\, dx < \varepsilon_1,$$

donde ε_1 es un número positivo cualquiera.

Supongamos ahora que N es tan grande que

$$\int_0^l \rho(x)\, [f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)]^2\, dx < \varepsilon_2;$$

donde c_n^* son los coeficientes de Fourier para $f^*(x)$. Entonces

$$\int_0^l \rho(x)\, [f(x) - \sum_{n=1}^{N} C_n X_n(x)]^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^l \rho(x)\, [|f(x) - f^*(x)| + |f^*(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)|]^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\int_0^l \rho(x)\, |f(x) - f^*(x)|\, |f^*(x) -$$

$$- \sum_{n=1}^{N} c_n^* X_n(x)|\, dx \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 . \varepsilon_2}.$$

Al estimar la última integral hemos utilizado la desigualdad de Buniakovski.

De ese modo queda demostrado que cualquiera que sea la función $f(x)$ de cuadrado integrable existen N y c_n tales que

$$\int_0^l \rho(x)\,[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)]^2\,dx \tag{34,22}$$

es tan pequeño como se quiera. Pero se sabe (véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones integrales", Gostiejizdat, 1951, pp. 66 - 67), que una integral de la forma (34,22) toma su menor valor cuando los c_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. Por eso, si en (34,22) tomamos por c_n estos coeficientes, el valor de la integral (34,22) no aumentará.

Valiéndonos de la ortogonalidad de las funciones $X_n(x)$ podemos calcular fácilmente que $\delta_N^2 = \int_0^l \rho[f(x)]^2\,dx - \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \geqslant 0$ (desigualdad de Bessel), donde c_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$. Por lo tanto, la condición de completo del sistema de funciones puede ser escrita en forma de la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_0^l \rho\,[f(x)]^2\,dx \tag{35,22}$$

(igualdad de Parseval).

10. Demostremos ahora el siguiente teorema fundamental: *la "serie de Fourier" de una función continuamente derivable en el segmento* $[0, l]$ *y que se anula en los extremos del segmento* $[0, l]$, *converge a esta función absoluta y uniformemente.*

Es suficiente demostrar que esta serie, en general, converge absoluta y uniformemente. En efecto, como esta serie converge "en la media" a $f(x)$, al converger uniformemente no puede tener como límite ninguna otra función.

Supongamos que n_0 es tan grande que $\lambda_n > 0$ para $n \geqslant n_0$. Utilizando la desigualdad de Cauchy podemos escribir para $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| = \sum_{k=n}^{n+s} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left|\frac{X_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n_0}^{n+s} c_k^2 \lambda_k} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{X_k^2}{\lambda_k}}.$$

Apliquemos ahora, para estimar el primer factor, la desigualdad (33,22) y en el segundo factor saquemos del radical la cantidad

$$\max_{k,\,x} |X_k(x)| = M.$$

De la desigualdad (33,22) se deduce que

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \leqslant D(f) + \sum_{k=1}^{n_0} c_k^2 |\lambda_k| \leqslant M_1^2$$

de manera que

$$\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| \leqslant M_1 M \sqrt{\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k}}.$$

De acuerdo con (19,22)

$$\lambda_k \geqslant c_1 k^2 + c_2,$$

es decir, $\dfrac{1}{\lambda_k} \leqslant \dfrac{1}{c_1 k^2 + c_2}$ y la serie $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ converge. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$ con n suficientemente grande y cualquier s positivo tendremos

$$\sum_{k=n}^{n+s} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon^2}{M^2 M_1^2}$$

y por eso $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+s} |c_k X_k| < \varepsilon$, es decir, $\sum c_k X_k(x)$ converge absoluta y uniformemente.

§ 23. FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO DE FOURIER

1. Consideremos la ecuación (1,21). Supongamos que los coeficientes de esta ecuación son funciones con tres derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que $A(t) > a_0 > 0$ y $C(x) > c_0 > 0$, es decir, que la ecuación (1,21) es hiperbólica.[65]

[65] Es fácil probar que todos los teoremas del § 22 y el teorema principal del § 23 son válidos, si $C(x)$ y $A(t)$ son funciones dos veces derivables, mientras que $D(t)$, $E(x)$ y $F_2(x)$ tienen derivadas continuas de primer orden y $F_1(t)$ es continua.

Buscaremos una solución de la ecuación (1,21) que tenga dos derivadas continuas en $\overline{C}_T$ y que verifique las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) \tag{1,23}$$

y las condiciones de contorno

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{2,23}$$

El método de Fourier conlleva la consideración de la serie (12,21) (véase el § 21). Las funciones $X_k(x)$ son funciones propias de la ecuación (1,22). Sea

$$L(f) \equiv (pf')' - qf.$$

Entonces la ecuación (1,22) se puede escribir así

$$L(X_k) = - \lambda_k \rho X_k.$$

Teorema. *Si $\varphi_0(x)$ tiene en el segmento $[0, l]$ tres derivadas continuas y verifica las condiciones*

$$\varphi_0 = L(\varphi_0) = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ y } x = l, \tag{3,23}$$

y si $\varphi_1(x)$ tiene en este segmento dos derivadas continuas y verifica las condiciones

$$\varphi_1 = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ y } x = l, \tag{4,23}$$

la función $u(t, x)$, definida por la serie (12,21), *tiene dos derivadas continuas y verifica en $\overline{C}_T$ la ecuación* (1,21), *las condiciones iniciales* (1,23) *y las condiciones de contorno* (2.23). *Además, la serie* (12,21) *se puede derivar término a término respecto a*

t y a x hasta dos veces inclusive; las series que se obtienen después de la derivación convergen absoluta y uniformemente en $\overline{C}_T$[66]

Demostración.[67] Consideremos la serie (12,21) obtenida en el § 21:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k T_k^*(t) + B_k T_k^{**}(t)\right]. \qquad (5,23)$$

Aquí $L(X_k) = -\lambda_k \rho X_k$, $\int_0^l \rho X_k^2 (x)\, dx = 1$,

$$A_k = \int_0^l \rho\varphi_0 X_k\, dx \quad \text{y} \quad B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k\, dx.$$

---

[66] Las condiciones (3,23) y (4,23) son necesarias para la existencia en $\overline{C}_T$ de una solución dos veces derivable del problema planteado. En efecto, de la condición (2,23) se sigue que $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ son iguales a cero en $x = 0$ y $x = l$. Por eso de la ecuación (1,21) obtenemos que cuando $x = 0$ y $x = l$

$$C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E(x) \frac{\partial u}{\partial x} + F_2(x)\, u = 0,$$

es decir, $L(\varphi_0) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = l$.

[67] Esta demostración pertenece a O. A. Oleynik y A. I. Barabanov.

Las funciones T_k^* y T_k^{**} son soluciones de la ecuación (6,21) para $\lambda = \lambda_k$ y verifican las condiciones iniciales

$$T_k^*(0) = 1, \quad \frac{dT_k^*(0)}{dt} = 0,$$
$$T_k^{**}(0) = 0, \quad \frac{dT_k^{**}(0)}{dt} = 1.$$

Mediante una sustitución de variables, análoga a (20,22), podemos reducir la ecuación (6,21) a la forma

$$w'' + \lambda_k w = R(s)\, w. \tag{6,23}$$

Entonces $T(t) = \psi(t)w$, donde $\psi(t)$ es una función que no depende de k, y por eso las funciones w_k^* y w_k^{**} correspondientes a las funciones T_k^* y T_k^{**} verifican las condiciones iniciales

$$w_k^*(0) = a^*, \quad w_k^{*\prime}(0) = b^* \text{ y } w_k^{**}(0) = 0, \quad w_k^{**\prime}(0) = b^{**},$$

donde a^*, b^*, b^{**} son ciertos números que no dependen de k. Para las soluciones de la ecuación (6,23) podemos escribir una ecuación integral del tipo (25,22). Empleando esta ecuación integral podemos, de la misma forma que en el § 22, obtener las estimaciones para w_k^*, w_k^{**} y sus derivadas. Esto nos permitirá encontrar para las funciones $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$ las siguientes estimaciones para valores de k suficientemente grandes

$$\left.\begin{aligned} |T_k^*| < M, \quad \left|\frac{dT_k^*}{dt}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, \quad \left|\frac{d^2T_k^*}{dt^2}\right| < M\lambda_k, \\ |T_k^{**}| < \frac{M}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad \left|\frac{dT_k^{**}}{dt}\right| < M, \quad \left|\frac{d^2T_k^{**}}{dt^2}\right| < M\sqrt{\lambda_k}, \end{aligned}\right\} \tag{7,23}$$

donde $M > 0$ es una constante.

Estimemos ahora los coeficientes de Fourier de la función $\varphi_0(x)$:

$$A_k = \int_0^l \rho\varphi_0 X_k\, dx = -\int_0^l \varphi_0 \frac{L(X_k)}{\lambda_k}\, dx =$$

$$= -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k} L\ (\varphi_0)\ X_k\ dx. \qquad (8{,}23)$$

La última igualdad la hemos obtenido integrando dos veces por partes y tomando en cuenta las condiciones de contorno $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$. De la igualdad (8,23) obtenemos

$$\lambda_k A_k = -\int_0^l \rho\, \frac{L(\varphi_0)}{\rho}\, X_k\, dx,$$

es decir, $\lambda_k A_k$ son los coeficientes de Fourier de la función $H(x) = -\dfrac{L(\varphi_0)}{\rho}$ que es continuamente derivable y verifica las condiciones $H(0) = H(l) = 0$.

Del teorema del subepígrafe 10 del § 22 se desprende que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k A_k|\ |X_k|$ converge uniformemente. De la desigualdad (33,22) obtenemos fácilmente la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$.

Estimemos ahora $B_k = \int\limits_0^l \rho\varphi_1 X_k dx$. Empleando una vez más la ecuación (1,22), integrando dos veces por partes y tomando en cuenta las condiciones de contorno $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = X_k(0) = X_k(l) = 0$, obtenemos

$$B_k = \int_0^l \rho\varphi_1 X_k \, dx = -\int_0^l \frac{1}{\lambda_k} \rho \frac{L(\varphi_1)}{\rho} X_k \, dx = \frac{\beta_k}{\lambda_k},$$

donde β_k son los coeficientes de Fourier de la función continua $H_1(x) = -\dfrac{L(\varphi_1)}{\rho}$. Según la igualdad (35,22) tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_2^2 = \int_0^l \rho \left(\frac{L(\varphi_1)}{\rho}\right)^2 dx.$$

Empleando las estimaciones (7,23), (29,22) y tomando en cuenta (20,22), se demuestra fácilmente que la convergencia absoluta y uniforme tanto de la serie (12,21) como de las series que se obtienen derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, se infiere de la convergencia de la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{|\lambda_k|}), \tag{9,23}$$

ya que para k suficientemente grande los términos de estas series no son mayores en valor absoluto que los términos de la serie

$$M_1 \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{|\lambda_k|}),$$

donde M_1 es una constante positiva. Para demostrar la convergencia de la serie (9,23), observemos que para n suficientemente grande

$$\sum_{k=n}^{n+m} (|\lambda_k||A_k| + |B_k|\sqrt{\lambda_k}) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \left(|A_k||\lambda_k|^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{|\beta_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} A_k^2 \lambda_k^3} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \beta_k^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}}. \tag{10,23}$$

Aquí hemos empleado la desigualdad de Cauchy. De la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2\lambda_k^3$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ y de la desigualdad (10,23) se infiere que la serie (9,23) converge. Con esto queda demostrado el teorema.

2. Demostremos ahora que el problema mixto para ecuaciones hiperbólicas del tipo (1,21) tiene solución única. En el § 18 hemos demostrado ya la unicidad de la solución del problema mixto para la ecuación de ondas.

Realizando la integración por partes, se comprueba sin dificultad que para cualesquiera dos funciones $u(t, x)$ y $v(t, x)$ con segundas derivadas continuas en $\overline{C}_T$ se cumple la siguiente fórmula, cualquiera que sea $0 < T_1 \leqslant T$

$$\iint\limits_{C_{T_1}} \Big\{ v\Big[A(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t)\frac{\partial u}{\partial t} + E(x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ (F_1(t) + F_2(x))u\Big] - u\Big[\frac{\partial^2(A(t)v)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(C(x)v)}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial(D(t)v)}{\partial t} - \frac{\partial(E(x)v)}{\partial x} + (F_1(t)+F_2(x))v\Big]\Big\}\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^l \Big[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial(Av)}{\partial t} + Duv\Big]_{t=T_1} dx -$$

$$- \int_0^l \Big[vA(t)\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial(Av)}{\partial t} + Duv\Big]_{t=0} dx +$$

$$+ \int_0^{T_1} \Big[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial(Cv)}{\partial x} + Euv\Big]_{x=l} dt -$$

$$- \int_0^{T_1} \Big[vC(x)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial(Cv)}{\partial x} + Euv\Big]_{x=0} dt. \qquad (11{,}23)$$

Supongamos que $u(t, x)$ verifica en $\overline{C}_T$ la ecuación (1,21) y las condiciones

$$u(0, x) = 0, \; u'_t(0, x) = 0, \; u(t, 0) = 0, \; u(t, l) = 0. \quad (12{,}23)$$

Demostremos que entonces $u(t, x) \equiv 0$.

Supongamos lo contrario. Sea (T_1, x_1) un punto donde $u(t, x)$ es diferente de cero. Apliquemos la fórmula (11,23) a la función $u(t, x)$ y a la función $v(t, x)$, que escogeremos de modo que verifique en $\overline{C}_{T_1}$ la ecuación

$$\frac{\partial^2 (A(t)v)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (C(x)v)}{\partial x^2} - \frac{\partial (D(t)v)}{\partial t} - \frac{\partial (E(x)v)}{\partial x} + \\ + (F_1(t) + F_2(x))\, v = 0 \quad (13{,}23)$$

y las condiciones

$$v(t, 0) = 0, \; v(t, l) = 0, \; v(T_1, x) = 0, \; v'_t(T_1, x) = \alpha(x), \quad (14{,}23)$$

donde $\alpha(x)$ es una función suave no negativa que es diferente de cero sólo en una pequeña vecindad del punto (T_1, x_1) donde $u(t, x)$ conserva su signo. La función $v(t, x)$ existe de acuerdo con el teorema anterior, ya que la ecuación (13,23) tiene la forma (1,21).

Es fácil ver que debido a las relaciones (1,21), (12,23), (13,23) y (14,23), el miembro izquierdo de la igualdad (11,23) es igual a cero mientras que el miembro derecho es igual a

$$\int_0^l - u(T_1, x)\, A(T_1)\, \alpha(x)\, dx \neq 0.$$

Esta contradicción comprueba que $u \equiv 0$.

Problema. Demuestre la dependencia continua de la solución del problema mixto para la ecuación (1,21) respecto a las condiciones iniciales: *la solución $u(t, x)$ de la ecuación* (1,21) *que verifique las condiciones* (1,23) *y* (2,23) *será tan pequeña como se quiera en valor absoluto en $\bar{C}_T$, siempre que $|\varphi_0(x)|$, $\left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right|$ y $|\varphi_1(x)|$ sean suficientemente pequeñas para toda x en el segmento $[0, l]$.*

Para demostrar esta afirmación hay que emplear las estimaciones (7,23) y (29,22), la igualdad (35,22) para la función $\varphi_1(x)$, la desigualdad (33,22) para la función $\varphi_0(x)$ y la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$.

Observación. Es fácil demostrar que si $u(t, x)$ verifica en $\bar{C}_T$ la ecuación (1,21), las condiciones iniciales (1,23) y las condiciones de contorno (2,23), la integral

$$\iint_{C_T} \rho u^2(t, x)\, dx\, dt$$

será tan pequeña como se quiera siempre que $\int_0^l \rho\varphi_0^2(x)\, dx$ y $\int_0^l \rho\varphi_1^2(x)\, dx$ sean suficientemente pequeñas.

En efecto, representando la función $u(t,x)$ por la serie (12,21), obtenemos

$$\iint_{C_T} \rho u^2(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \iint_{C_T} \rho \left| \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right|^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint_{C_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, A_k T_k^*(t) \right)^2 dx\,dt +$$

$$+ 2 \iint_{C_T} \rho \left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, B_k T_k^{**}(t) \right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + K_2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 = K_1 \int_0^l \rho\varphi_0^2(x)\,dx + K_2 \int_0^l \rho\varphi_1^2(x)\,dx,$$

donde K_1 y K_2 son ciertas constantes positivas que no dependen de φ_0 y φ_1. Al obtener este resultado hemos empleado la desigualdad elemental $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, la ortogonalidad con peso $\rho(x)$ de las funciones propias que se suponen normalizadas, la acotación de las funciones T_k^* y T_k^{**} y la igualdad de Parseval (35,22).

3. Si las funciones iniciales $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ no verifican las condiciones del teorema que hemos demostrado, puede no existir una solución dos veces continuamente derivable en $\overline{C}_T$ del problema mixto para la ecuación (1,21). Pero si $\varphi_0(x)$ es una

función continuamente derivable que se anula en $x = 0$ y $x = l$ y si $\varphi_1(x)$ es una función continua en el segmento $[0, l]$, la serie (12,21) converge uniformemente y determina en $\overline{C}_T$ una función continua $u(t, x)$. Esta función $u(t, x)$ será la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) correspondiente a las condiciones iniciales (1,23) y a las condiciones de contorno (2,23).

La función $u(t, x)$ se llama solución generalizada de la ecuación (1,21) con las condiciones iniciales (1,23) y las condiciones de contorno (2,23), si $u(t, x)$ es en $\overline{C}_T$ el límite, cuando $n \to \infty$, de una sucesión $u_n(t, x)$ uniformemente convergente de soluciones de la ecuación (1,21) con las condiciones de contorno (2,23) y las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u_n(0, x) &= \varphi_0^n(x), \\ \frac{\partial u_n(0, x)}{\partial t} &= \varphi_1^n(x), \end{aligned}\right\} \tag{15,23}$$

y cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_0(x) - \varphi_0^n(x)]^2\,dx \to 0$$

y

$$\int_0^l \rho\,[\varphi_1(x) - \varphi_1^n(x)]^2\,dx \to 0. \tag{16,23}$$

Demostremos que si $\varphi_0(x)$ es una función continuamente derivable y que se anula en $x = 0$ y $x = l$ y si $\varphi_1(x)$ es una función continua en $[0, l]$, a la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23) y (2,23) corresponde una solución generalizada única. La existencia de la solución generalizada se desprende de que las sumas parciales de la serie (12,21) forman una sucesión $u_n(t, x)$ que verifica las condiciones impuestas, de modo que la serie (12,21) es, por consiguiente, la solución generalizada. Comprobemos ahora que la solución generalizada es única.

Si las sucesiones $u_n(t, x)$ y $\widetilde{u_n}(t, x)$ correspondientes a dos diferentes sucesiones de las funciones $\varphi_0^n(x)$, $\varphi_1^n(x)$ y $\widetilde{\varphi_0^n}(x)$, $\widetilde{\varphi_1^n}(x)$ tuviesen las dos funciones límites diferentes $u(t, x)$ y $\widetilde{u}(t, x)$, tendríamos:

$$\iint_{C_T} \rho\,(u-\widetilde{u})^2\,dx\,dt =$$

$$= \iint_{C_T} \rho\,[(u-u_n)+(u_n-\widetilde{u_n})+(\widetilde{u_n}-\widetilde{u})]^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 3\iint_{C_T} \rho\,(u-u_n)^2\,dx\,dt + 3\iint_{C_T} \rho\,(u_n-\widetilde{u_n})^2\,dx\,dt +$$

$$+ 3\iint_{C_T} \rho\,(\widetilde{u_n}-\widetilde{u})^2\,dx\,dt. \qquad (17,23)$$

Según la observación del 2 del epígrafe presente, la integral

$$\iint_{C_T} \rho(u_n-\widetilde{u_n})^2\,dx\,dt$$

tiende a cero cuando $n \to \infty$, ya que

$$\int_0^l \rho\,(\varphi_0^n - \widetilde{\varphi}_0^n)^2\,dx \quad \text{y} \quad \int_0^l \rho\,(\varphi_1^n - \widetilde{\varphi}_1^n)^2\,dx$$

tienden a cero cuando $n \to \infty$. Puesto que las otras dos integrales en el miembro derecho de la desigualdad (17,23) también tienden a cero, tendremos

$$\iint_{C_T} \rho\,(u - \widetilde{u})^2\,dx\,dt = 0.$$

Debido a que $u - \widetilde{u}$ y $\rho > 0$ son funciones continuas, obtenemos $u(t, x) \equiv \widetilde{u}(t, x)$.

De la definición de la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) se desprende que, si para las funciones dadas $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ existe en $\overline{C}_T$ una solución del problema mixto con segundas derivadas continuas, la solución generalizada del problema mixto coincide con esta solución.

A veces la solución generalizada del problema mixto para la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23), (2,23) se define como una función $u(t, x)$ para la cual

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{C_T} \rho\,(u_n - u)^2\,dx\,dt = 0, \tag{18,23}$$

donde $u_n(t, x)$ son soluciones de la ecuación (1,21) con las condiciones de contorno (2,23) y las condiciones iniciales (15,23) y se supone que se cumplen las relaciones (16,23).

Señalemos otras posibles formas de definición de la solución generalizada del problema mixto en las cuales se emplean identidades integrales (véase § 9). Para facilitar la exposición consideraremos la ecuación

$$P(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)\,u = 0. \quad (19{,}23)$$

La solución generalizada del problema mixto para la ecuación (19,23) con las condiciones iniciales y de contorno (1,23), (2,23) es una función $u(t, x)$ que tiene primeras derivadas continuas en $\overline{C}_T$, verifica las condiciones

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0 \quad (20{,}23)$$

y la identidad integral

$$\iint_{C_T}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - p\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - qu\sigma\right)dx\,dt + \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0 \quad (21{,}23)$$

cualquiera que sea la función $\sigma(t, x)$, cuyas primeras derivadas son continuas, y que se anula para $t = T$, para $x = 0$ y para $x = l$.

A veces es cómodo utilizar la siguiente definición.

La solución generalizada del problema mixto para la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23) es una función $u(t, x)$ continua en $\overline{C}_T$ que verifica la identidad integral

$$\iint_{C_T} uP(\sigma)\,dx\,dt + \int_0^l \varphi_0(x)\,\frac{\partial \sigma}{\partial t}(0, x)\,dx - \int_0^l \varphi_1(x)\,\sigma(0, x)\,dx = 0, \quad (22{,}23)$$

donde $\sigma(t, x)$ es una función arbitraria con segundas derivadas continuas y para la cual

$$\sigma(t, 0) = \sigma(t, l) = \sigma(T, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}(T, x) = 0. \qquad (23{,}23)$$

Es evidente que la solución generalizada definida por la identidad (21,23) para las condiciones (20,23) es, a la vez, solución generalizada en el sentido (22,23); el recíproco, en general, no se cumple.

Introduciendo las soluciones generalizadas, podemos ampliar, en una u otra medida, la clase de funciones iniciales para las cuales existe la solución del problema mixto. Es muy importante que en la nueva clase de soluciones conserve su validez el teorema de la unicidad.

Problema 1. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23), definida mediante la relación (18,23) (donde $\rho = 1$), existe y es única, si las funciones $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ son continuas por partes y de cuadrado integrable en el segmento $[0, l]$.

Problema 2. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23), (2,23), definida mediante las relaciones (20,23), (21,23), existe y es única, si la función $\varphi_0(x)$ tiene dos derivadas continuas en el segmento $[0, l]$, $\varphi_1(x)$ tiene una derivada continua en este segmento y, además, se cumple

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0 \ \text{ y } \ q(x) \geqslant 0.$$

Sugerencia. Para demostrar la unicidad emplee la función

$$\sigma(t, x) = \int_T [u_1(\tau, x) - u_2(\tau, x)]\, d\tau,$$

donde u_1 y u_2 son dos soluciones generalizadas de un mismo problema mixto.

Problema 3. Demuestre que la solución generalizada de la ecuación (19,23) con las condiciones (1,23) y (2,23), definida mediante la relación (22,23), existe y es única, si la función $\varphi_0(x)$ es continua en el segmento $[0, l]$, se anula en $x = 0$, $x = l$, tiene una derivada seccionalmente continua y es de cuadrado integrable en este segmento, mientras que $\varphi_1(x)$ es seccionalmente continua y de cuadrado integrable en el segmento $[0, l]$.

Sugerencia. Emplee, para demostrar la unicidad, los resultados del 4 del presente subepígrafe.

4. Método de Fourier para una ecuación hiperbólica no homogénea

Consideremos en $\overline{C}_T$ el problema mixto para la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u + f(t, x) \equiv L(u) + f(t, x), \tag{24,23}$$

es decir, queremos encontrar en $\overline{C}_T$ una solución de esta ecuación que tenga segundas derivadas continuas, verifique las condiciones iniciales

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u'_t(0, x) = \varphi_1(x) \tag{25,23}$$

y las condiciones de contorno

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0. \tag{26,23}$$

Será suficiente construir la solución que verifique las condiciones (25,23) con $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) \equiv 0$, que la solución que buscamos se obtendrá añadiendo a ésta la serie (12,21).

Busquemos la solución $u(t, x)$ del problema planteado en la forma de la serie de Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) X_k(x)$, según las funciones propias de la ecuación $L(X) = -\lambda X$ con las condiciones de frontera $X(0) = X(l) = 0$. Desarrollando $f(t, x)$ en serie de Fourier según estas funciones propias y comparando los coeficientes de Fourier de los miembros derecho e izquierdo de la ecuación (24,23) obtendremos, para determinar los coeficientes de Fourier $a_k(t)$, ecuaciones diferenciales del tipo

$$a_k''(t) = -\lambda_k a_k(t) + f_k(t), \tag{27,23}$$

donde $f_k(t) = \int_0^l f(t, x) X_k(x)\, dx$ y $L(X_k) = -\lambda_k X_k$. Se comprueba fácilmente que la solución de la ecuación (27,23) que verifica las condiciones $a_k(0) = a_k'(0) = 0$, es la función

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_k}(t - \tau)\, d\tau.$$

Por lo tanto, la solución $u(t, x)$ de la ecuación (24,23) que verifique las condiciones (26,23) y las condiciones

$$u(0, x) = u_t'(0, x) = 0, \tag{28,23}$$

debe representarse mediante la serie

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_k}(t - \tau)\, d\tau \right) X_k(x). \tag{29,23}$$

Si la serie (29,23) y las series obtenidas derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, convergen uniformemente en $\overline{C}_T$, la suma de esta serie es una función que tiene en $\overline{C}_T$ segundas derivadas continuas y que verifica la ecuación (24,23) y las condiciones (26,23) y (28,23). Este carácter convergente se puede garantizar si exigimos que la función continua $f(t, x)$ tenga una derivada continua de segundo orden respecto a x y que para cualquier t se cumplan las condiciones $f(t, 0) = f(t, l) = 0$. Debe suponerse además que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ tienen dos derivadas continuas. La demostración de este resultado es análoga a la demostración del teorema fundamental del presente epígrafe. Los coeficientes de Fourier $f_k(t)$ de la función $f(t, x)$ se estiman de la misma forma que los coeficientes B_k de la serie (12,21).

§ 24. APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN AL PROBLEMA DE LOS VALORES PROPIOS Y A LA FUNDAMENTACIÓN DEL MÉTODO DE FOURIER

Para demostrar la existencia de un sistema completo de funciones propias en el problema de los valores propios y para estudiar las propiedades principales de este sistema, se puede emplear otro método, sin tener que recurrir a la solución de problemas variacionales. Para ello reducimos el problema de contorno a una ecuación integral de Fredholm de segunda especie, mediante la llamada *función de Green* que ahora construiremos.

1. Consideremos el problema de hallar en el intervalo $(0, l)$ la solución de la ecuación

$$(pX')' - qX = f(x), \tag{1,24}$$

que verifique las condiciones

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2,24}$$

Además de la ecuación (1,24), consideremos la ecuación

$$(pY')' - qY = g_\varepsilon(x, x_0) \tag{3,24}$$

que tiene el mismo miembro izquierdo que la ecuación (1,24) pero cuyo término independiente es

$$g_\varepsilon(x, x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ cuando } x_0 - \dfrac{\varepsilon}{2} < x < x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0 \text{ para todas las restantes } x. \end{cases}$$

Aquí ε y x_0 son ciertos parámetros; $\varepsilon > 0$; $0 < x_0 < l$, $0 < \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \min\{x_0, l - x_0\}$. *Supongamos que* $Y_\varepsilon(x, x_0)$ es la solución de esta ecuación que verifica las condiciones de contorno (2,24) y depende de los parámetros ε y x_0.[68]

[68] El miembro derecho de la ecuación (3,24) tiene dos puntos de discontinuidad de primera especie: $x = x_0 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se puede probar que si $q \geqslant 0$, existe una solución única de la ecuación (3,24) que verifica las condiciones de contorno (2,24) y es continua al igual que su primera derivada en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$. La segunda derivada tiene discontinuidades de primera especie en $x = x_0 \pm \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Multipliquemos la ecuación (1,24) por Y_ε y la ecuación (3,24) por X sustituyendo previamente Y_ε por Y; restemos la segunda de la primera e integremos la diferencia según el intervalo $(0, l)$. Obtendremos

$$\int_0^l [(pX')'\, Y_\varepsilon - (pY'_\varepsilon)'\, X]\, dx =$$

$$= \int_0^l [Y_\varepsilon(x, x_0)\, f(x) - X(x)\, g_\varepsilon(x, x_0)]\, dx.$$

Debido a que las funciones $X(x)$ e $Y_\varepsilon\ (x, x_0)$ se anulan en los extremos del intervalo de integración, el miembro izquierdo de la igualdad es igual a cero y esto se comprueba fácilmente realizando una doble integración por partes:

$$\int_0^l (pX')'\, Y_\varepsilon dx = pX'Y_\varepsilon \Big|_0^l - \int_0^l pX'Y'_\varepsilon\, dx =$$

$$= - pY'_\varepsilon X \Big|_0^l + \int_0^l (pY'_\varepsilon)' X\, dx = \int_0^l (pY'_\varepsilon)' X\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^l Y_\varepsilon(x, x_0)\, f(x)\, dx = \int_0^l g_\varepsilon(x, x_0)\, X(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} X(x)\, dx \approx X(x_0). \quad (4,24)$$

Si suponemos que cuando $\varepsilon \to 0$ la función $Y_\varepsilon\ (x, x_0)$ converge uniformemente respecto a x a una función límite [denotémosla $G(x, x_0)$], entonces, pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$ en ambos miembros de la igualdad (4,24), obtenemos

$$X\,(x_0) = \int_0^l G\,(x,\ x_0)\, f\,(x)\, dx. \tag{5,24}$$

La función límite $G(x, x_0)$ es precisamente la *función de Green* para la ecuación (1,24).

Estos razonamientos poco rigurosos no permiten por ahora dar la demostración completa de ningún resultado. Por eso, definiremos la función de Green independientemente de los razonamientos anteriores —que más bien tienen carácter ilustrativo— y demostraremos, en primer lugar, que dicha función existe y, en segundo lugar, que la fórmula (5,24) es válida.

Antes de dar la definición exacta de la función de Green, veamos qué propiedades debe tener el límite —si es que existe— de $Y_\varepsilon\ (x, x_0)$. Sustituyamos $Y_\varepsilon\ (x, x_0)$ por Y en (3,24) e integremos la identidad obtenida respecto a x entre $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$, donde $\delta > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Obtendremos

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{[pY'_\varepsilon(x, x_0)]' - qY_\varepsilon(x, x_0)\}\, dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_\varepsilon(x, x_0)\, dx = 1.$$

El primer sumando se puede integrar en forma explícita y la igualdad anterior toma la forma

$$pY'_\varepsilon(x,\ x_0)\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} - \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} qY_\varepsilon(x,\ x_0)\, dx = 1.$$

Supongamos que aquí se puede pasar formalmente al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y δ es fijo; tendremos la igualdad

$$p(x_0 + \delta)\, G'_x(x_0 + \delta, x_0) - p(x_0 - \delta)\, G'_x(x_0 - \delta, x_0) - \\ - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} q(x)\, G(x, x_0)\, dx = 1,$$

que se cumple para cualquier $\delta > 0$. Pasando ahora al límite cuando $\delta \to 0$ y suponiendo que $p(x)$, $q(x)$ y $G(x, x_0)$ son funciones continuas, encontraremos la igualdad

$$p(x_0)\,[G'_x(x_0 + 0, x_0) - G'_x(x_0 - 0, x_0)] = 1,$$

de donde se infiere que para las suposiciones hechas la derivada $G'_x(x, x_0)$ de la función de Green respecto a x tiene en $x = x_0$ un salto que es igual a $\dfrac{1}{p(x_0)}$.

2. Demos ahora la definición formal de la función de Green para la ecuación (1,24) y demostremos que existe.

Llamamos función de Green para la ecuación (1,24) *con las condiciones de contorno* (2,24) *a una función* $G(x, s)$ *definida en el cuadrado* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$, *que verifica las siguientes* condiciones:

1º *Para* $x \neq s$, $G(x, s)$ *como función de* x *es continua al igual que sus derivadas hasta el segundo orden inclusive y verifica la ecuación homogénea*

$$[pG'_x(x, s)]'_x - qG(x, s) = 0. \tag{6,24}$$

2º. $$G(0, s) = G(l, s) = 0.$$

3º *$G(x, s)$ es continua en el cuadrado* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant s \leqslant l$ mientras que $G'_x(x, s)$ *tiene, como función de x, una discontinuidad de primera especie en $x = s$ con un salto de* $\frac{1}{p(s)}$, *es decir,*

$$G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{p(s)} \quad (0 < s < l).$$

Al demostrar la existencia de esta función supondremos que $q \geqslant 0$ de manera que $\lambda = 0$ no es valor propio de la ecuación

$$(pX')' - qX + \lambda\rho X = 0$$

con las condiciones de contorno (2,24). (Véase el § 39 de mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias", 1952).

Haciendo esta suposición, la existencia de la función de Green se demuestra construyéndola directamentte. En efecto, sea $X_1(x)$ cierta solución no trivial de la ecuación $(pX')' - qX = 0$ que verifica la condición

$$X_1(0) = 0,$$

y sea $X_2(x)$ una solución no trivial de la misma ecuación que verifica la condición

$$X_2(l) = 0.$$

Debido a la suposición hecha, las soluciones $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son linealmente independientes. De lo contrario serían simplementte proporcionales y cada una se anularía en $x = 0$ y $x = l$ sin ser idénticamente nulas; y esto es imposible, ya que $\lambda = 0$ no es un valor propio. Supongamos

$$G(x, s) = \begin{cases} A(s)\, X_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ B(s)\, X_2(x), & s < x \leqslant l. \end{cases} \tag{7,24}$$

Entonces las condiciones 1 y 2 se verifican cualesquiera que sean $A(s)$ y $B(s)$.

Escojamos ahora $A(s)$ y $B(s)$ de manera que se cumpla la tercera condición. De la continuidad de $G(x, s)$ en $x = s$, obtenemos

$$A(s)X_1(s) = B(s)X_2(s),$$

de donde

$$A(s) = c(s)X_2(s),$$
$$B(s) = c(s)X_1(s).$$

Exijamos que el salto de la derivada en el punto $x = s$ tenga el valor dado $\dfrac{1}{p(s)}$:

$$G'_x(s - 0, s) = c(s)\, X_2\,(s)X'_1(s),$$
$$G'_x(s + 0, s) = c(s)\, X_1\,(s)X'_2(s),$$

de donde obtenemos

$$c(s) = \frac{1}{p(s)\,[X_1(s)X'_2(s) - X'_1(s)X_2(s)]}.$$

El denominador $p(s)\ [X_1(s)\, X'_2(s) - X_2(s)\, X'_1(s)]$ no depende de s. En efecto, dentro de los corchetes figura el determinante de Wronsky $\Delta\,(X_1,\ X_2)$ de las soluciones linealmente independientes $X_1(s)$ y $X_2(s)$. Según la fórmula conocida

$$\Delta(X_1,\ X_2) = \Delta_0 e^{-\int\limits_0^x \frac{p'(x)\,dx}{p(x)}} = \frac{\Delta_0 p\,(0)}{p\,(x)},$$

de donde se sigue que $c(s)$ es constante.

De modo que la función de Green tiene la forma:

$$\left.\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0\, p(0)}\, X_2(s) X_1(x) \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ G(x, s) &= \frac{1}{\Delta_0\, p(0)}\, X_1(s) X_2(x) \text{ cuando } s \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \qquad (8{,}24)$$

Por consiguiente, queda demostrada la existencia de la función de Green.

De la fórmula (8,24) se infiere directamente que *la función de Green es simétrica respecto a sus argumentos*:

$$G(x, s) = G(s, x).$$

Demostremos ahora la fórmula (5,24) para la solución $X(x)$ de la ecuación (1,24), que verifica las condiciones de contorno (2,24). Probemos primeramente que la función

$$X(x) = \int_0^l G(x, s)\, f(s)\, dx \qquad (9{,}24)$$

satisface la ecuación (1,24). Debido a la simetría de la función de Green, la función definida por la fórmula (9,24) coincide con (5,24). Para calcular $X'(x)$ representemos (9,24) en la forma

$$X(x) = \int_0^x G(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G(x, s)\, f(s)\, ds. \qquad (10{,}24)$$

Derivando esta relación respecto a x, obtenemos

$$X'(x) = \int_0^x G'_x(x, s)\, f(s)\, ds + \int_x^l G'_x(x, s)\, f(s)\, ds + \\ + G(x, x-0)\, f(x) - G(x, x+0)\, f(x).$$

Puesto que la función de Green es continua, encontramos

$$X'(x) = \int_0^x G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int_x^l G'_x(x, s) f(s)\, ds. \qquad (11,24)$$

Derivando (11,24) respecto a x, obtendremos la expresión de $X''(x)$ en la forma

$$X''(x) = \int_0^x G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + \int_x^l G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds +$$

$$+ G'_x(x, x - 0) f(x) - G''_x(x, x + 0) f(x).$$

Puesto que $G'_x(x + 0, x) - G'_x(x - 0, x) = \dfrac{1}{p(x)}$, tendremos

que $G'_x(x, x - 0) - G'_x(x, x + 0) = \dfrac{1}{p(x)}$. Por eso

$$X''(x) = \int_0^l G''_{xx}(x, s) f(s)\, ds + \frac{f(x)}{p(x)}. \qquad (12,24)$$

Sustituyendo en la ecuación (1,24) las expresiones para X, X', X'', obtendremos

$$(pX')' - qX = \int_0^l [(p(x)\, G'_x)'_x - qG]\, f(s)\, ds + f(x) = f(x).$$

Observando la forma del miembro derecho de la igualdad (5,24) podemos ver que la función $X(x)$ definida por la igualdad (5,24) se anula en $x = 0$ y $x = l$.

Por lo tanto, la fórmula (5,24) ofrece la solución de la ecuación (1,24), que verifica las condiciones (2,24). Debido a la suposición $q \geqslant 0$, esta solución de la ecuación (1,24) es única.

3. Veamos cómo mediante la función de Green para la ecuación (1,24) el problema de los valores propios, examinado en los epígrafes anteriores, se reduce a una ecuación integral. Para ello escribamos la ecuación principal (1,22) en la forma

$$(pX')' - qX = -\lambda\rho X \tag{13,24}$$

y, tomando $f(x) = -\lambda\rho X$, apliquemos a la misma la fórmula (5,24). Obtendremos la igualdad.

$$X(s) + \lambda \int_0^l G(x, s)\,\rho(x)\,X(x)\,dx = 0, \tag{14,24}$$

que representa una ecuación homogénea de Fredholm de segunda especie con núcleo simetrizable y parámetro λ.

El núcleo de la ecuación (14,24) se puede simetrizar multiplicando la igualdad (14,24) por $\sqrt{\rho(s)}$. Entonces la ecuación se convierte en una ecuación con la función incógnita $\sqrt{\rho(s)}\,X(s)$ y con el núcleo simétrico $G(x, s)\sqrt{\rho(x)\,\rho(s)}$. De acuerdo con la fórmula (5,24), la ecuación (13,24) junto con la condición de contorno $X(0) = X(l) = 0$ y la ecuación (14,24) son equivalentes, en el sentido de que toda solución de (13,24) que se anula en $x = 0$ y $x = l$ es una solución, correspondiente al mismo valor de λ, de la ecuación (14,24) y viceversa.

Por otro lado, para ecuaciones del tipo (14,24) son válidos los teoremas demostrados en el § 22 sobre la existencia de valores y funciones propias y sobre la ortogonalidad de las funciones propias, así como el teorema referente a la descomposición (véanse, por ejemplo, mis "Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones integrales", Gostiejizdat, 1951 §§ 11 - 14). De aquí se desprenden directamente los teoremas sobre la existencia y ortogonalidad de las funciones propias y el teorema sobre la descomposición, demostrados en el § 22. Es verdad que para demostrar el teorema de la descomposición para la función $f(x)$ es necesario exigir que su segunda derivada sea continua para poder representarla en la forma (5,24) y aplicar el teorema de Gilbert-Schmidt.

La función de Green, que reduce una ecuación diferencial a una integral, se puede definir también para otros tipos de condiciones de contorno y en el caso de ecuaciones con muchas variables independientes. Sin embargo, su expresión explícita se logra obtener solamente para casos muy especiales de ecuaciones y condiciones de contorno.

4. La función de Green permite fundamentar el método de Fourier aplicado a la solución del problema mixto de la ecuación (1,21) con las condiciones (1,23), (2,23), sin emplear los resultados del § 22.

Para simplificar la exposición, consideremos una ecuación del tipo (19,23), donde $p > 0$, $q \geqslant 0$, y demostremos para esta ecuación el teorema enunciado en el subepígrafe 1 del § 23. La serie (12,21) tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_k}t\right). \qquad (15,24)$$

Aquí λ_k son los valores propios y $X_k(x)$ las funciones propias de la ecuación

$$L(X) \equiv (pX')' - qX = -\lambda X \tag{16,24}$$

con las condiciones de contorno (2,24). La existencia de valores propios y de funciones propias se demuestra basándose en la equivalencia de la ecuación (16,24) con las condiciones (2,24) y la ecuación integral con núcleo simétrico

$$X(x) + \lambda \int_0^l G(x, s)\, X(s)\, ds = 0, \tag{17,24}$$

donde $G(x, s)$ es la función de Green para el problema (16,24), (2,24).

Puesto que las funciones iniciales $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ verifican las condiciones del teorema del 1 del § 23, los coeficientes A_k y B_k de (15,24) cumplen las relaciones (véase § 23):

$$A_k = \int_0^l \varphi_0 X_k\, dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^l L(\varphi_0)\, X_k\, dx; \tag{18,24}$$

$$B_k = \int_0^l \varphi_1 X_k\, dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^l L(\varphi_1)\, X_k\, dx. \tag{19,24}$$

Para demostrar que la serie (15,24) y las series que se obtienen derivándola término a término respecto a x y a t hasta dos veces inclusive, convergen uniformemente, es suficiente probar que en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ convergen uniformemente las siguientes series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(x)| (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k}\, |B_k|), \tag{20,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k'(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \tag{21,24}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k''(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \tag{22,24}$$

La ecuación (16,24) nos da

$$X_k'' = \frac{-p'}{p} X_k' + \frac{q - \lambda_k}{p} X_k;$$

por consiguiente, la serie (22,24) converge uniformemente si convergen uniformemente las series (20,24) y (21,24).

Supongamos, igual que antes,

$$D(f, g) = \int_0^l (pf'g' + qfg)\, dx,$$

$$D(f) = \int_0^l (pf'^2 + qf^2)\, dx;$$

es evidente que $D(f) \geqslant 0$ para toda función f. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (16,24) por X_k e integrando entre 0 y l, obtenemos mediante la integración por partes

$$\lambda_k \int_0^l X_k^2 \, dx = D(X_k) ;$$

de aquí se desprende que $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ya que $X'_k(x) \not\equiv 0$.

Lema. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[0, l]$, se anula en $x = 0$ y $x = l$, tiene en este segmento una derivada continua por partes y es de cuadrado integrable.

Entonces se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant D(f), \tag{23,24}$$

donde $c_k = \int_0^l f \, X_k dx \qquad (k = 1, 2, \ldots)$

Demostración. Integrando por partes, obtenemos

$$D(f, X_k) = - \int_0^l f[(pX'_k)' - qX_k] \, dx = \lambda_k c_k ;$$

$$D(X_i, X_k) = \lambda_k \int_0^l X_i \, X_k \, dx = \lambda_k \delta_{ik}.$$

Esto nos permite encontrar que

$$0 \leqslant D\left(f - \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) + D\left(\sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) - $$
$$- 2D\left(f, \sum_{k=1}^{N} c_k X_k\right) = D(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2 ,$$

de donde se desprende (23,24).

Según la suposición, la función $L(\varphi_0)$ verifica las condiciones del lema que acabamos de demostrar; por eso la desigualdad (23,24) se cumple para $L(\varphi_0)$. Recordando (18,24), encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2 \leqslant D(L(\varphi_0)). \tag{24,24}$$

La función $L(\varphi_1)$ es continua en el segmento $[0, l]$. Tomando en cuenta la relación (19,24) obtenemos, empleando la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2 \leqslant \int_0^l [L(\varphi_1)]^2 \, dx. \tag{25,24}$$

De la ecuación (17,24) tenemos

$$\frac{X_k(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G(x, s)\, X_k(s)\, ds; \tag{26,24}$$

por consiguiente, $\dfrac{X_k(x)}{\lambda_k}$ para x fijo es el k-ésimo coeficiente de

Fourier de la función $-G(x, s)$ que verifica en el segmento $0 \leqslant s \leqslant l$ las condiciones del lema. Por eso

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant D(G) \leqslant M_1 \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (27,24)$$

Derivando (26,24), obtenemos

$$\frac{X_k(x)}{\lambda_k} = -\int_0^l G_x X_k(s)\, ds;$$

en virtud de la desigualdad de Bessel, de aquí se desprende que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k'^2(x)}{\lambda_k^2} \leqslant \int_0^l G_x'^2\, ds \leqslant M_2 \text{ cuando } 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (28,24)$$

Comprobemos ahora que la serie (20,24) converge uniformemente en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$. Aplicando la desigualdad de Cauchy y empleando la estimación (27,24) encontramos

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k(x)| \left(\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k}\, |B_k|\right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\lambda_k^{\frac{3}{2}} |A_k| + \lambda_k |B_k|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k}} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_1} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 B_k^2}\right);$$

de aquí se infiere la convergencia uniforme de la serie (20,24) ya que las series numéricas $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2$ convergen debido a (24,24) y (25,24).

Demostremos la convergencia uniforme de la serie (21,24). Usando la desigualdad (28,24), obtenemos

$$\sum_{k=n}^{n+m} |X_k'(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{|X_k'(x)|}{\lambda_k} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{M_2} \left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k B_k^2} \right). \qquad (29,24)$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k^2$ converge debido a que para la función $L(\varphi_0)$ se cumple la desigualdad de Bessel; la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2$ converge en virtud de la aplicación del lema a la función φ_1. Por eso de (29,24) se desprende la convergencia uniforme de la serie (21,24).

Observación 1. Haciendo los mismos razonamientos se puede fundamentar el método de Fourier para el problema mixto con la ecuación general (1,21), con sólo utilizar las estimaciones del tipo (7,23) para las funciones $T_k^*(t)$ y $T_k^{**}(t)$ y sus derivadas.

Observación 2. Los resultados del presente epígrafe permiten obtener de otra forma el teorema fundamental expuesto en el 10 del § 22. En efecto, para una función que verifica las condiciones del lema anterior, debido a las desigualdades (23,24) y (27,24), obtenemos:

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k|\,|X_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} \sqrt{\lambda_k}\,|c_k|\,\frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{D(G)}\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \lambda_k c_k^2} < \varepsilon$$

para una $n > N(\varepsilon)$, es decir, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x)$ converge uniforme y absolutamente en el segmento $[0, l]$.

§ 25. ESTUDIO DE LAS VIBRACIONES DE UNA MEMBRANA

1. En el § 1 hemos considerado el ejemplo de la ecuación de las vibraciones de una membrana

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (1,25)$$

Supongamos que en la posición de equilibrio la membrana coincide con una región acotada G del plano (x, y) que tiene frontera Γ suave por trazos. Entonces la función $u(t, x, y)$ que determina estas vibraciones debe verificar la ecuación (1,25) y las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u\,(0, x, y) &= \varphi_0(x, y) \text{ (desplazamiento inicial)},\\ u'_t(0, x, y) &= \varphi_1(x, y) \text{ (velocidad inicial)}, \end{aligned}\right\} \quad (2{,}25)$$

cuando el punto $(x, y) \in G$. En la frontera Γ de la región G la función $u(t, x, y)$ debe verificar alguna de las condiciones de contorno del tipo considerado en el § 1.

Analizaremos el caso elemental: una membrana con borde fijo, es decir, la condición de contorno

$$u(t, x, y) = 0, \text{ cuando } (x, y) \in \Gamma. \qquad (3{,}25)$$

Resolviendo el problema nuevamente por el método de separación de variables, pongamos

$$u(t, x, y) = T(t)\, v\,(x, y).$$

Análogamente al caso unidimensional, obtendremos las siguientes ecuaciones para las funciones $T(t)$ y $v(x, y)$:

$$T'' + \lambda T = 0, \qquad (4{,}25)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0. \qquad (5{,}25)$$

Para la ecuación (5,25) con la condición de contorno (3,25) existe una sucesión infinita de valores propios. Las funciones propias correspondientes a los diferentes valores propios son ortogonales. En comparación con el caso de una variable independiente, puede suceder que a ciertos valores propios corresponda no una, sino varias funciones propias linealmente independientes. Estos valores propios se dicen múltiples. Entre las funciones propias que corresponden a un valor propio dado, siempre se puede escoger un sistema finito de funciones propias linealmente independientes y ortogonales entre sí, de manera que cada función propia —correspondiente a este valor propio— sea una combinación lineal de las mismas.

Las funciones propias así escogidas para todos los valores propios forman un sistema completo de funciones ortogonales

$$v_1(x, y), \quad v_2(x, y), \quad \ldots, v_n(x, y), \quad \ldots$$

Desarrollemos las funciones $\varphi_0(x, y)$ y $\varphi_1(x, y)$ en series según las funciones $v_n(x, y)$

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x, y), \quad \varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n(x, y). \tag{6,25}$$

Tomemos dos soluciones $T^*(t)$ y $T^{**}(t)$ linealmente independientes de la ecuación (4,25) de modo que se verifiquen las condiciones

$$T^*(0) = 1; \quad T^{*\prime}(0) = 0; \quad T^{**}(0) = 0; \quad T^{**\prime}(0) = 1.$$

La serie

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)\left[A_n T_n^*(t) + B_n T_n^{**}(t)\right] \tag{7,25}$$

representa la solución de nuestro problema siempre que tanto esta serie como las que se obtienen derivándola término a término respecto a t, x e y, hasta dos veces inclusive, converjan uniformemente.

Consideraremos ahora dos casos particulares en que las funciones propias de la ecuación (5,25) se pueden encontrar, a su vez, separando las variables. Análogamente se puede proceder en el caso en que el número de variables es mayor. Estos casos se pueden estudiar exhaustivamente, reduciéndolos a un problema de valores propios unidimensional mediante el siguiente lema.

Lema. *Sea $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas con peso $\rho_1(x)$ en el segmento $[a, b]$. Supongamos, además, que para todo n $(n = 1, 2, \ldots)$ existe un sistema completo de funciones*

$$\psi_{n1}(y),\ \psi_{n2}(y),\ \ldots,\ \psi_{nm}(y),\ \ldots \tag{8,25}$$

ortogonales y normalizadas con peso $\rho_2(y)$ en el segmento $[c, d]$. Las funciones $\rho_1(x)$ y $\rho_2(y)$ se suponen continuas y no negativas. En este caso las funciones

$$X_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\psi_{nm}(y)$$

forman un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas con peso $\rho(x, y) = \rho_1(x)\ \rho_2(y)$ en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, es decir, se cumplen las igualdades

$$\int_c^d \int_a^b \rho\,(x, y)\, X_{nm}(x, y)\, X_{n'm'}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ si } n = n', & m = m', \\ 0 \text{ si } n \neq n' & \text{ó } m \neq m', \end{cases} \tag{9,25}$$

y si

$$c_{nm} = \int_a^d \int_c^b \rho\,(x, y)\, f\,(x, y)\, X_{nm}\,(x, y)\, dx\, dy,$$

para cualquier función $f(x, y)$, continua en el rectángulo señalado, se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_c^d \int_a^b \rho(x, y)\,[f(x, y)]^2\,dx\,dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}^2. \qquad (10{,}25)$$

Demostración. Es evidente que las fórmulas (9,25) son válidas. Para demostrar (10,25) tomemos

$$\int_a^b \rho_1(x)\,f(x, y)\,\varphi_n(x)\,dx = g_n(y).$$

Entonces es obvio que

$$\int_c^d \rho_2(y)\,g_n(y)\,\psi_{nm}(y)\,dy = c_{nm},$$

$$\int_a^b \rho_1[f(x, y)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$$

y que

$$\int_c^d \rho_2(y)\,g_n^2(y)\,dy = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^2$$

ya que los sistemas $\psi_{mm}(y)$ son completos para cualquier n y la función $g_n(y)$ es de cuadrado integrable.

Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)$ está formada por términos positivos y converge en todo punto del segmento $[c, d]$ a una función continua, podemos afirmar, de acuerdo con el teorema de Dini, que esta serie converge uniformemente en este segmento y que, por lo tanto,

$$\int_c^d \int_a^b \rho(x, y)\,[f(x, y)]^2\,dx\,dy = \int_c^d \rho_2(y) \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2(y)\,dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d \rho_2(y)\, g_n^2(y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2. Consideremos el primer caso particular: *vibraciones de una membrana rectangular.*

Supongamos que la región G es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Separando las variables en la ecuación (5,25), pongamos

$$v(x, y) = X(x)\,Y(y).$$

Después de la sustitución de esta función, la ecuación (5,25) toma la forma

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0.$$

Dividamos por XY y pasemos $\dfrac{X''}{X}$ al miembro derecho de la igualdad. La igualdad obtenida

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X}$$

es equivalente a dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \alpha X = 0, \quad Y'' + \beta Y = 0,$$

donde α es una constante y $\beta = \lambda - \alpha$. De acuerdo con la condición de contorno (3,25), la primera ecuación debe resolverse con las condiciones

$$X(0) = X(a) = 0,$$

y la segunda con las condiciones análogas

$$Y(0) = Y(b) = 0.$$

Para verificar estas condiciones debemos aceptar que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ (véase el § 20). Repitiendo los razonamientos del § 20, *obtenemos las sucesiones de valores propios y de funciones propias normalizadas* de la primera y segunda ecuaciones

$$\alpha_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x;$$

$$\beta_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y;$$

$$(n, m = 1, 2, \ldots).$$

De acuerdo con el lema, el sistema de funciones

$$v_{nm}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y \tag{11,25}$$

es un sistema completo de soluciones ortogonales y normalizadas de la ecuación (5,25) en el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ con la condición de contorno (3,25), (aquí $Y_{nm}(y) = Y_m(y)$ para cualquier n). A cada función propia $v_{nm}(x, y)$ corresponde el valor propio

$$\lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right).$$

Es evidente que si los números a y b son conmesurables, podremos obtener un mismo valor de λ para n y m escogidos de diferente modo, es decir, para diferentes funciones propias. Tenemos, por consiguiente, un ejemplo de valores propios múltiples.

El problema del desarrollo de las condiciones iniciales en una serie según las funciones (11,25) es simplemente el estudio correcto de la descomposición de una función en una serie doble de Fourier según los senos. Si las condiciones iniciales —después de extenderlas de modo impar según x e y al rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ y periódicamente a todo el plano— son funciones de cuatro derivadas continuas, entonces los coeficientes de las series (6,25) tienden a cero suficientemente rápido, en el sentido de que la serie (7,25) puede ser derivada dos veces. Por lo tanto, en este caso, es correcto aplicar el método de Fourier para resolver el problema planteado. Podemos ver que una vibración arbitraria de la membrana, al igual que la vibración de la cuerda, se puede representar como la superposición de una serie de vibraciones simples, las llamadas vibraciones *propias*, correspondientes a los valores propios λ_{nm}.

Presentan interés las *líneas nodos* de estas vibraciones, es decir, las líneas a lo largo de las cuales se anula la función propia correspondiente al valor propio dado. Consideremos estas líneas en el caso de la membrana rectangular. Si el valor propio dado no es múltiple, es decir, si le corresponde solamente una función propia

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y,$$

las líneas nodos son simplemente segmentos de rectas paralelas a los lados del rectángulo. En cambio, si el valor propio es múltiple, a diferentes combinaciones de las funciones propias corresponden distintas líneas nodos, la forma de las cuales puede ser muy variada. En la figura 11 que damos más abajo hemos representado las líneas nodos de una membrana cuadrada de lado 1 para los valores $\lambda = 5\pi^2,\ 10\pi^2,\ 13\pi^2,\ 17\pi^2$. Debajo de las figuras de las líneas nodos hemos indicado las correspondientes funciones propias.

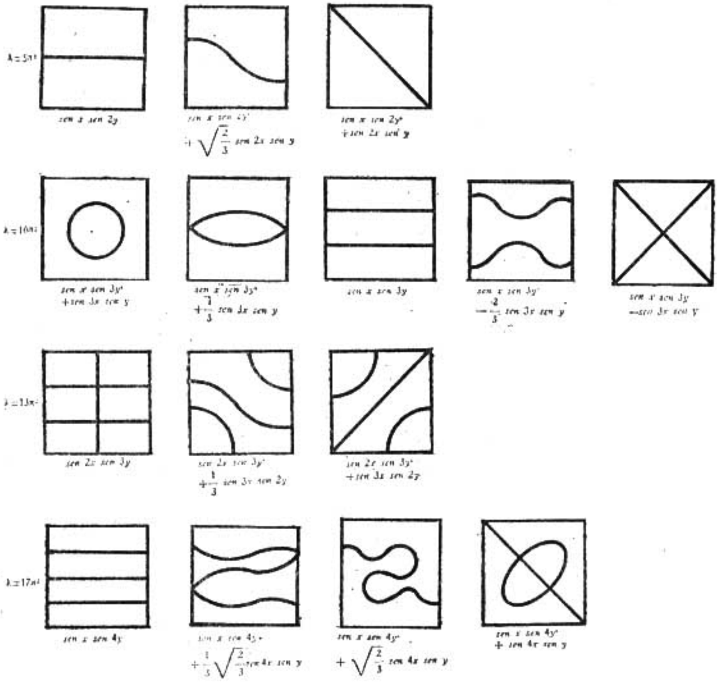

Fig. 11

3. Como segundo ejemplo consideremos una membrana circular. Para su estudio, es natural escribir la ecuación (5,25) en coordenadas polares.

Siendo $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho$ sen φ, encontramos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \tag{12,25}$$

Si tomamos el centro D del círculo, con el cual coincide la menbrana en la posición de equilibrio, en el origen de coordenadas y para simplificar aceptamos que el radio del círculo es igual a 1, la condición de contorno (3,25) se puede escribir en la forma

$$v(1, \varphi) = 0.$$

Aplicando el método de separación de variables, pongamos

$$v(\rho, \varphi) = R(\rho)\, \Phi(\varphi),$$

de donde, realizando la sustitución y separando las variables, obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias para $R(\rho)$ y $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi) + \alpha\Phi(\varphi) = 0, \tag{13,25}$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2 - \alpha)\, R = 0. \tag{14,25}$$

Para las soluciones de la ecuación (13,25) tenemos, debido al sentido físico del problema, la condición de periodicidad; nos interesan solamente las soluciones que tienen período 2π. Tales soluciones existen solamente si

$$\alpha = 0,\ 1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ n^2\ \ \ldots$$

Para estos valores de α

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi.$$

Podemos escoger un sistema completo de funciones $\Phi_n(\varphi)$ ortogonales y normalizadas en la circunsferencia, por ejemplo,

$$\Phi_0^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \ \Phi_n^*(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos n\varphi; \ \Phi_n^{**}(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \operatorname{sen} n\varphi.$$

Volvamos a la ecuación (14,25). Después de colocar los valores $\alpha = n^2$ y sustituir la variable independiente

$$\rho_1 = \rho\sqrt{\lambda}$$

obtenemos una ecuación de Bessel de n-ésimo orden

$$\rho_1^2 R''(\rho_1) + \rho_1 R'(\rho_1) + (\rho_1^2 - n^2)\, R(\rho_1) = 0;$$

su única solución (salvo un factor constante), acotada cuando $\rho_1 \to 0$ (es decir, cuando $\rho \to 0$), es la función de Bessel $J_n(\rho_1)$ de primera especie y n-ésimo orden.[69]

Es sabido que para cualquier n la función $J_n(x)$ tiene un número infinito de raíces positivas $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$, de manera que $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$.

Además, que para cualquier n fijo, las funciones $J_n(\mu_m^{(n)} x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ son ortogonales con peso x en el intervalo $(0, 1)$ y forman un sistema completo de funciones ortogonales en este intervalo:

$$\int_0^1 x J_n(\mu_m^{(n)} x)\, J_n(\mu_{m_1}^{(n)} x)\, dx = 0 \quad \text{si} \quad m \neq m_1.$$

[69] Véase, por ejemplo, V. V. Stepanov, Curso de ecuaciones diferenciales, cap. VI, § 2, epígrafe 2, p. 250, Fizmatguiz, 1959.

Las funciones

$$\varphi_{nm}(x) = \frac{J_n(\mu_m^{(n)}x)}{\sqrt{\int\limits_0^1 x\,[J_n(\mu_m^{(n)}x)]^2\,dx}}$$

para un n cualquiera forman un sistema completo de funciones ortogonales y normalizadas. Sin demostrar estos resultados,[70] observemos que son una generalización de las propiedades de las funciones propias, demostradas en el § 22, aplicadas al caso de *ecuaciones con coeficientes de forma más general que los considerados allí.* En efecto, la ecuación (14,25) se puede escribir en la forma

$$(\rho R')' - \frac{\alpha}{\rho} R + \lambda\rho R = 0,$$

y vemos que el primero y el último coeficientes se anulan en uno de los extremos del segmento $[0, 1]$ y que $\frac{\alpha}{\rho}$ se hace un infinito en ese extremo. De acuerdo con esto, se puede demostrar que bastará tomar como condición de contorno para $\rho = 0$, en el problema de valores propios de la ecuación (14,25), la condición de que la solución sea acotada, para que la misma quede determinada unívocamente, salvo un factor constante, siempre que en $\rho = 1$ se cumpla una de las condiciones del tipo (2,22).

Exijamos que para $\rho = 1$ sea

$$J_n(\sqrt{\lambda}\rho) = 0,$$

[70] Véase, por ejemplo, R. O. Kuzmin, Funciones de Bessel, ONTI, 1935; A. N. Tijonov y A. A. Samarski, Ecuaciones de física matemática. Gostiejizdat, 1953, pp. 566 - 619.

es decir, que

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Vemos que si $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ es la sucesión de ceros de la función $J_n(x)$, los valores propios λ de nuestro problema serán

$$\lambda_{nm} = [\mu_m^{(n)}]^2,$$

y las funciones propias normalizadas de la ecuación (14,25) serán las funciones

$$\psi_{nm}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho) \frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^1 \rho\,[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)]^2\,d\rho}}$$

Aplicando el lema del subepígrafe 1, podremos obtener un sistema completo de funciones propias

$$\psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^*(\varphi),\ \psi_{nm}(\rho)\,\Phi_n^{**}(\varphi)$$

de la ecuación (12,25) y encontrar la solución de nuestro problema desarrollando las funciones $\varphi_0(\rho, \varphi)$ y $\varphi_1(\rho, \varphi)$ en series del tipo

$$\varphi_0(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [c_{nm}^* \Phi_n^*(\varphi) + c_{nm}^{**} \Phi_n^{**}(\varphi)]\, \psi_{nm}(\rho),$$

$$\varphi_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [d_{nm}^* \Phi_n^*(\varphi) + d_{nm}^{**} \Phi_n^{**}(\varphi)]\, \psi_{nm}(\rho).$$

Multiplicando los términos de la primera serie por las $T^*(t)$ correspondientes y los términos de la segunda por las $T^{**}(t)$

correspondientes, y sumando las series obtenidas, encontraremos la serie (7,25) que representa la solución del problema planteado. La convergencia uniforme y la posibilidad de derivar término a término la serie obtenida, se cumplirán, como siempre, cuando las funciones $\varphi_0(\rho, \varphi)$ y $\varphi_1(\rho, \varphi)$ sean suficientemente suaves, verifiquen las mismas condiciones de contorno que debe verificar la solución que se busca de la ecuación (1,25) y cumplan, además, ciertas condiciones adicionales en la frontera del círculo.